Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

Feuille 6 — Bases orthogonales, projections

Exercice 1. *Orthogonalité et somme directe.*

1. Trouver un exemple de trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 d'un espace vectoriel E tels que $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = \{0\}$ alors que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe.
2. On suppose maintenant E euclidien et F_1, F_2, F_3 deux à deux orthogonaux. Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe.

Exercice 2. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 tf(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. (Vérifier auparavant qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.)

Remarque : les polynômes obtenus à la question 2 sont connus sous le nom de polynômes de Legendre.

Exercice 3. Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère les trois vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. On note π la projection orthogonale sur F.

1. Trouver une base de E dans laquelle la matrice de π est diagonale.
2. En déduire la matrice de π dans la base canonique.
3. En déduire $\pi(w)$ (dans la base canonique).

Exercice 4. Soit E un espace euclidien et $S = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $G(S) = \det((\langle u_i, u_j\rangle)_{ij})$.

1. Montrer que, si S est orthogonale, on a $G(S) = (\|u_1\| \ldots \|u_p\|)^2$.
2. Montrer que $G(S)$ ne change pas si l'on ajoute à u_i une combinaison linéraire de $u_1, \ldots, u_{i-1}$.
3. Soit S' la famille obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à S. Montrer que $G(S) = G(S')$.
4. Soit $w \in E$, et T la famille $(u_1, \ldots, u_p, w)$. On note de plus $F = \mathrm{Vect}(S)$. Montrer que la distance de w à F est donnée par $\sqrt{G(T)/G(S)}$.