Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

# Feuille 2 — Formes linéaires et dualité

**Exercice 1.** À toute matrice $A \in M_n(K)$ on associe l'application $\varphi_A$ définie sur $M_n(K)$ par $\varphi_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

1. Montrer que $\varphi_A$ est une forme linéaire.
2. Réciproquement, montrer que toutes les formes linéaires sur $M_n(K)$ s'écrivent de cette façon.
3. En déduire que l'application $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $M_n(K)$ sur son dual.

**Exercice 2.** Déterminer la forme linéaire $f$ définie sur $\mathbf{R}^3$ telle que

$$f(1,1,1) = 0 \quad f(2,0,1) = 1 \quad f(1,2,3) = 4 \; .$$

Donner une base de $\ker(f)$.

**Exercice 3.** On note $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ et $e_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)$. Montrer que $(e_1, e_2)$ forme une base de $\mathbf{R}^2$ et déterminer sa base duale $(f_1, f_2)$. Sans calcul, déterminer $\ker f_1$ et $\ker f_2$.

**Exercice 4.** Soient $f_1$ et $f_2$ les deux formes linéaires sur $\mathbf{R}^2$ définies par

$$f_1(x,y) = x + y \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x - 2y$$

1. Montrer que $(f_1, f_2)$ forme une base de $(\mathbf{R}^2)^*$ et déterminer sa base préduale.
2. On définit des formes $g$ et $h$ par

   $$g(x,y) = x - y \quad \text{et} \quad h(x,y) = 2x - 6y$$

   Exprimer ces formes linéaires dans la base $(f_1, f_2)$.

**Exercice 5.** Soient $E$ un espace vectoriel et $f$ et $g$ deux formes linéaires sur $E$. Montrer que $fg = 0$ si et seulement si $f = 0$ ou $g = 0$.