Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

Feuille 5 — Produits scalaires et orthogonalité

Exercice 1. Dans $E = \mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ainsi que les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \mathrm{Vect}(u, v)$. Par ailleurs, on considère la forme linéaire définie par $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3$.

1. On note $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ les orthogonaux de F et G pour le produit scalaire usuel. Donner une base de chacun d'eux.
2. Trouver un vecteur w tel que $f(x) = \langle w, x \rangle$ pour tout $x \in E$.

On pose maintenant $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3$.

3. Montrer que φ est un produit scalaire.
4. On note $F^{\perp_\varphi}$ et $G^{\perp_\varphi}$ les orthogonaux de F et G pour φ. Donner une base de chacun d'eux.
5. Trouver un vecteur w' tel que $f(x) = \varphi(w', x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces. Montrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 3. Soit $x > 0$, on note E_x l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0, x], \mathbf{R})$ telles que $f(0) = 0$ et on pose $\varphi_x(f, g) = \int_0^x f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ_x est un produit scalaire sur E_x.
2. En déduire que que $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 (f'(t))^2\, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

Exercice 4. Montrer que $1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n} \leqslant n(n + 1)\sqrt{2n + 1}/2\sqrt{3}$.

Exercice 5. On considère la forme φ définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 9x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2\ .$$

1. Montrer que φ est bilinéaire.
2. Donner sa matrice A dans la base canonique et en déduire que φ est symétrique.
3. Appliquer la méthode de Gauss et en déduire que φ est un produit scalaire.
4. On pose $f_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$ puis $f_2(x) = x_2 - x_3$ et enfin $f_3(x) = x_3$. Justifier brièvement que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$.
5. Calculer sa base préduale et montrer sans calculs qu'elle est orthogonale pour φ.
6. Donner la matrice B de φ dans cette nouvelle base.
7. Expliciter les relations entre A et B.