Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

# Feuille 4 — Produit scalaire

**Exercice 1.** On considère la fonction définie sur $(M_n(\mathbf{R})^2$ par $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$. Montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique qui n'est ni définie ni positive.

**Exercice 2.** On considère la fonction définie sur $(\mathbf{R}_n[X])^2$ par $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer que c'est toujours une forme bilinéaire symétrique positive, et que c'est un produit scalaire si et seulement si $n = 1$.

**Exercice 3.** En appliquant la méthode de Gauss, dire si les formes bilinéaires symétriques suivantes sont définies, positives, des produits scalaires.

1. $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1$ ;
2. $\varphi_2(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$.

**Exercice 4.** Appliquer la méthode de Gauss aux formes quadradiques suivantes, et en déduire si elles sont définies, positives.

1. $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2$ ;
2. $q_2(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ ;
3. $q_3(x) = (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - (3x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (5x_2 - 7x_3)^2$.

**Exercice 5.** On considère la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\mu x_1x_2 \ .$$

En appliquant la méthode de Gauss, dire pour quelles valeurs de $(\lambda, \mu)$ cette forme est définie, positive.