Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

# Devoir surveillé

Cours autorisé ; durée : 1h30

**Exercice 1.** On considère, sur $E = \mathbf{R}_2[X]$, l'application $\varphi\colon P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\varphi \in E^*$ et calculer $\varphi(aX^2 + bX + c)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $ev_x\colon P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur $E$.
3. Montrer que, si $ev_{-1}(P) = ev_0(P) = ev_1(P) = 0$, alors $P = 0$. En déduire que $(ev_{-1}, ev_0, ev_1)$ est une base de $E^*$.
4. Exprimer $\varphi$ dans cette base. (Indication : on peut commencer par calculer $ev_i(aX^2 + bX + c)$ pour $i \in \{-1, 0, 1\}$.)

**Exercice 2.** Sur $\mathbf{R}^3$, on considère les applications $f_1$, $f_2$, $f_3$ définies par $f_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_2(x) = x_2 + 2x_3$, $f_3(x) = x_2 + 3x_3$.

1. Jutifier brièvement que ce sont des applications linéaires.
2. Montrer que la famille $(f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $(\mathbf{R}^3)^*$.
3. Calculer sa base préduale, qu'on notera $(e_1, e_2, e_3)$.

On défini maintenant une forme quadratique $q$ par $q(x) = f_1(x)^2 - 4f_2(x)^2 + f_3(x)^2$.

4. Cette écriture est-elle une forme de Gauss ? Justifier soigneusement.
5. Trouver un vecteur $y$ tel que $q(y) < 0$.
6. En utilisant le fait que $(e_1, e_2, e_3)$ est la base préduale de $(f_1, f_2, f_3)$, donner la valeur de $q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)$ en faisant le moins de calculs possible. (Indication : inutile d'utiliser les valeurs de $e_1$, $e_2$ et $e_3$.)
7. En déduire un vecteur $z \neq 0$ tel que $q(z) = 0$.

Plus généralement, on considère $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $(\mathbf{R}^n)^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ sa base préduale. On pose $q(x) = \alpha_1 f_1(x)^2 + \cdots + \alpha_n f_n(x)^2$ où $\alpha_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pour tout $i$.

8. En s'inspirant des deux questions précédentes, montrer que s'il existe $i$ et $j$ tels que $\alpha_i > 0$ et $\alpha_j < 0$, alors il existe $z \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $q(z) = 0$. (Indication : on pourra exprimer $z$ en fonction de $e_i$, $e_j$, $\alpha_i$ et $\alpha_j$.)
9. Déduire de la question précédente et du cours que $q$ est définie si et seulement si tous les $\alpha_i$ sont de même signe.

**Exercice 3.** Mettre sous forme de Gauss les formes quadratiques suivantes.

$$q_1(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3 \qquad q_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$$
$$q_3(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 \qquad q_4(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Lesquelles sont définies, positives ?