Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M63 algèbre et géométrie

Devoir à la maison

Exercice 1. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$, on pose

$$\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Si $A = ((a_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = ((b_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que :
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} b_{ji}.$$
3. Supposons à présent, A symétrique et B antisymétrique. Montrer alors :
   - $\varphi(A, A) \geqslant 0$,
   - $\varphi(B, B) \leqslant 0$,
   - $\varphi(A, B) = 0$.

   Montrer de plus que les deux inégalités sont strictes si $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
4. La forme φ est-elle un produit scalaire ?
5. Si $n \geqslant 2$, trouver une matrice C non nulle telle que $\varphi(C, C) = 0$.

Exercice 2. Soit $f\colon E \to F$ un morphisme entre espaces de dimensions finies.

1. Montrer que $\operatorname{im}({}^t f) = \ker(f)^o$ et que $\ker({}^t f) = \operatorname{im}(f)^o$.
2. En déduire que f est injective si et seulement si ${}^t f$ est surjective et que f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.

Exercice 3. Soient $f\colon E \to F$ un morphisme et V un sous-espace de E. Montrer que $f(V)^o = ({}^t f)^{-1}(V^o)$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel et f et g deux formes linéaires sur E. Montrer que $fg = 0$ si et seulement si $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 5. Soit $x > 0$, on note E_x l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0, x], \mathbf{R})$ telles que $f(0) = 0$ et on pose $\varphi_x(f, g) = \int_0^x f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ_x est un produit scalaire sur E_x.
2. En déduire que que $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

Exercice 6. Soit f une forme bilinéraire symétrique définie sur un espace vectoriel E et soit q la forme quadratique associée.

1. Vérifier que, pour tous u et v dans E, on a

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right) = \frac{1}{4}\big(q(u+v) - q(u-v)\big) \ .$$

2. Montrer que $\forall (x,y,z) \in E^3$, on a

$$q(x+y) + q(y+z) + q(z+x) = q(x) + q(y) + q(z) + q(x+y+z) \ .$$

3. Vérifier que, pour tous u et v dans E, on a

$$2q(u) + 2q(v) = q(u+v) + q(u-v) \ .$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle norme sur E une application N de E dans $\mathbf{R}^+$ telle que, pour tous x et y dans E et λ dans $\mathbf{R}$:

$$\begin{gathered} N(x) = 0 \implies x = 0 \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \end{gathered}$$

1. Justifier brièvement que, si φ est un produit scalaire sur E, alors $N_\varphi(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$ définit une norme au sens ci-dessus sur E. On dit qu'une telle norme dérive d'un produit scalaire.
2. Pour cette question, on considère $E = \mathbf{R}^n$ et on définit deux fonctions N_1 et N_∞ par

$$\begin{gathered} N_1(x) = |x_1| + \cdots + |x_n| \\ N_\infty(x) = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \end{gathered}$$

   Montrer que ce sont des normes.
3. Montrer que ni N_1 ni N_∞ ne dérivent d'un produit scalaire. (On pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent.)
4. Soit N une norme telle que pour tous x et y dans E on ait

$$2N(x)^2 + 2N(y)^2 = N(x+y)^2 + N(x-y)^2 \tag{$*$}$$

   On pose $f(x,y) = \big(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\big)/4$.
   (a) Montrer que f est symétrique et que pour tout x, on a $f(x,0) = 0$.
   (b) Montrer que f est bilinéaire.
   (c) En déduire que f est un produit scalaire.
5. En déduire qu'une norme dérive d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité $(*)$.