Dualité : orthogonalité.

Exercice 1.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $F \oplus G = E$. Montrer que $F^{\perp} \oplus G^{\perp} = E^*$.

Exercice 2.

Soit E et F deux espaces de dimension finie, et f un morphisme de E dans F.

1. Montrer que $Im({}^t f) = Ker(f)^{\perp}$ et que $Ker({}^t f) = Im(f)^{\perp}$.
2. En déduire que f est injective si et seulement si ${}^t f$ est surjective et que f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.

Exercice 3.

Soit E, un espace vectoriel, et A et B, deux sous-espaces de E.

1. Montrer que $(A \cup B)^o \subset A^o \cup B^o, A^o + B^o \subset (A \cap B)^o$ et $A^o \cap B^o \subset (A + B)^o$. Si E est de dimension finie, montrer que les deux dernières inclusions sont des égalités.

2. Soit E^*, le dual de E, et F et G, deux sous-espaces de E^*. Montrer que ${}^o(F+G) ={}^o F \cap^o G, {}^o F +^o G \subset^o (F \cap G)$ et ${}^o F \cap^o G \subset^o (F + G)$.

3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $dim(F) + dim({}^o F) = dim(E) = dim(E^*)$ et que les inclusions de la question 2. sont des égalités.

Exercice 4.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et F un sous-espace de E stable par f, i.e.

$$f(F) \subset F.$$

Montrez que $F^{\perp}$ est stable par ${}^t f$.

Exercice 5.

Soient E et F deux espaces vectoriels, V, un sous-espace de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$f(V)^o = ({}^t f)^{-1}(V^o).$$

Exercice 6.

Soient E et F, deux espaces vectoriels et E^* et F^*, leurs duaux respectifs.
Soit G, un sous-espace de E, G^o, son orthogonal dans E^* et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On note $A = \{x^* \in F^*, {}^t f(x^*) \in G^o\}$.

1. Prouver que A est l'orthogonal de $f(G)$ dans F^*.
2. Prouver que l'orthogonal de $f(E)$ dans F^* est le noyau de ${}^t f$.
3. Si F_1 et G_1 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, montrer que F_1^o et G_1^o sont supplémentaires dans E^* et que

$$E = F_1 \oplus G_1 \Rightarrow E^* = F_1^o \oplus G_1^o.$$