Réduction des endomorphismes 3: Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1

1. Soit A la matrice à coefficients réels :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculez le polynôme caractéristique de A
2. Déterminez la dimension des sous-espaces propres de A et donnez-en une base .
3. Calculez A^2, déterminez une base de son noyau et, sans calcul, une base des sous-espaces caractéristiques de A.
4. Quel est le polynôme minimal de A ?
5. Montrez que $\exp(A)$ est une combinaison linéaire de I_5, $(A - I_5)$, $(A - I_5)^2$, $(A - I_5)^3$, $(A - I_5)^4$; donnez l'expression de $\exp(A)$ en fonction de ces matrices.

Exercice 2 Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 10 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$
Quel est le polynôme minimal de M ? En déduire M^{-1} et $\exp(M)$.

Exercice 3 On suppose que A et B appartiennent à $M_n(\mathbb{C})$, montrez que si A et B sont semblables elles ont même polynôme minimal.

Exercice 4 Soit $A \in M_n(K)$, montrez que A et ${}^tA$ ont même polynôme minimal.

Exercice 5 Donner le polynôme minimal des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 6. Chercher les endomorphismes f de E de polynôme minimal $(f^2 - f + 3)(f - 2Id)^2 = 0$

Exercice 7 Soit A une matrice réelle de taille n vérifiant

$$A^3 - 3A - 4I_n = 0.$$

Montrer que A est de déterminant strictement positif.

Exercice 8 Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
2. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 9 Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Exercice 10 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de u (autre que le polynôme nul, évidemment) ?

Exercice 11 Soit f un endomorphisme sur $\mathbb{C}^n$, on note M_f et C_f son polynôme minimal et son polynôme caractéristique. Montrer que M_f et C_f ont les mêmes facteurs irréductibles. Généraliser au cas des endomorphismes sur $\mathbb{R}^n$.