Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M66 algèbre linéaire et bilinéaire

Devoir surveillé

Exercice 1. On considère les trois matrices A, B et C suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition de Dunford de A et le polynôme minimal de B, sans calculs mais en justifiant.
2. Calculer la réduite de Jordan de C en donnant une matrice de passage. Calculer ensuite l'exponentielle de C.

Exercice 2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} A & A \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{R})$. Le but de l'exercice est d'étudier à quelles conditions sur A la matrice B est trigonalisable, voire diagonalisable.

1. Montrer que $B^n = \left(\begin{smallmatrix} A^n & nA^n \\ 0 & A^n \end{smallmatrix}\right)$.
2. Montrer que le polynôme minimal de A divise celui de B.
3. En déduire que si B est trigonalisable, alors A aussi.
4. De même, montrer que si B est diagonalisable, alors A aussi.
5. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $Q = \left(\begin{smallmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que $QBQ^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} PAP^{-1} & PAP^{-1} \\ 0 & PAP^{-1} \end{smallmatrix}\right)$.
6. En déduire que si A est trigonalisable, alors B aussi.
7. Pour cette question, on suppose que A est diagonalisable et on note $x_1, \dots, x_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). Montrer que B est semblable à

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & 0 & 0 & \dots\dots & & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & \dots\dots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_2 & \dots\dots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & \dots\dots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & x_n & x_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

   et donner la forme réduite de Jordan de B.
8. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.