Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M54 algèbre et arithmétique 2

Feuille 3 — Idéaux, quotients

Exercice 1.
1. Montrer qu'un anneau n'ayant que deux idéaux est un corps.
2. Montrer qu'un anneau intègre n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux est un corps. Indication : pour $x \neq 0$, considérer les idéaux (x^n) pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2. Soient K un corps et A un anneau non nul. Montrer que tous les morphismes de K dans A sont injectifs.

Exercice 3. Déterminer $I + J$, $I \cap J$ et IJ pour :
1. $I = 8\mathbf{Z}$ et $J = 12\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$;
2. $I = (X - 1)$ et $J = (X)$ dans $\mathbf{Z}[X]$;
3. $I = (X^2 + 1)$ et $J = (X + 2)$ dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 4. Soient A un anneau et I un idéal de A. On appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}, x^n \in I\}$.
1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal.
2. Dans $\mathbf{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbf{Z}}$ et $\sqrt{72\mathbf{Z}}$.

Exercice 5. Soient A un anneaux, I et J deux idéaux de A tels que $I + J = A$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $I^n + J^n = A$.

Exercice 6. Soient A et B deux anneaux, I un idéal de A et $f : A \to B$ un morphisme surjectif. Montrer que $f(I)$ est un idéal de B.

Exercice 7. Soient K_1 et K_2 deux corps. Déterminer tous les idéaux de $K_1 \times K_2$.

Exercice 8. Soient A un anneau, a et b deux éléments de A. Montrer que :
1. L'anneau $A[X]/(X - a)$ est isomorphe à A ;
2. L'anneau $A[X, Y]/(Y - b)$ est isomorphe à $A[X]$;
3. L'anneau $A[X, Y]/(X - a, Y - b)$ est isomorphe à A.

Indication : quel est le noyau du morphisme de $A[X]$ dans A qui envoie X sur a ?

Exercice 9. On note $\mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.
1. Écrire la liste complète des polynômes de degré 1 dans $\mathbf{F}_2[X]$.
2. En déduire que $\mathbf{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ où l'on a noté α l'image de X dans $\mathbf{F}_4$.
3. Dresser les tables d'addition et de multiplication de $\mathbf{F}_4$.
4. Constater que $\mathbf{F}_4$ est un corps et en déduire qu'il n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

Félicitations, vous venez de rencontrez votre premier corps fini non primitif !