Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M54 algèbre et arithmétique 2

Feuille 1 — Anneaux, corps, morphismes

Exercice 1. Soient x, y et z trois éléments d'un anneau non nécessairement commutatif. Montrer qu'on a les égalités suivantes :

1. $x(y-z) = xy - xz$; et $(x-y)z = xz - yz$;
2. $0x = x0 = 0$;
3. $x(-y) = (-x)y = -xy$;
4. $(-1)x = x(-1) = -x$;

Montrer que si l'anneau est commutatif, on a aussi $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ et donner un exemple où ce n'est pas le cas dans un anneau non commutatif.

Exercice 2. Dresser les tables de multiplication des anneaux suivants : $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$; $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. Lesquels sont des corps ? Donner le groupe des inversibles de chacun.

Exercice 3. Montrer que $A^\times \times B^\times = (A \times B)^\times$.

Exercice 4. Soit K un corps ; dites si les anneaux suivants sont des corps, ou au moins des anneaux intègres.

1. $\mathcal{F}(E, K)$ où E est un ensemble quelconque ;
2. $M_n(K)$ où $n \in \mathbf{N}$;
3. $K[X]$ où X est une variable ;
4. $K \times L$ où L est un autre corps.

Exercice 5.

1. Soient A un anneau et a un de ses éléments. On note m_a l'application de multiplication par a, c'est-à-dire que $m_a(x) = ax$ pour tout $x \in A$. Montrer que m_a est injective si et seulement si a est simplifiable.
2. En déduire que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 6.

1. Montrer qu'un élément nilpotent n'est jamais inversible.
2. Donner des exemples d'éléments idempotents inversibles et non inversibles.

Exercice 7. Montrer que $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 8. Soit A un anneau.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme de A dans $\{0\}$.
2. Montrer qu'il existe un unique morphisme de $\mathbf{Z}$ dans A.
3. Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un unique morphisme $f\colon \mathbf{Z}[X] \to A$ tel que $f(X) = x$.

Exercice 9. Montrer que le seul endomorphisme de $\mathbf{Q}$ est l'identité.