Examen de Janvier 2010

Les anneaux dans les exercices suivants sont tous supposés unitaires et commutatifs.

Exercice 1. Les questions sont indépendantes.

1. Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps. Donner un exemple d'anneau intègre qui ne soit pas un corps.
2. Démontrer que tout morphisme d'un corps dans un anneau non-trivial est injectif.
3. Trouver tous les idéaux de l'anneau suivant : $(\mathbb{Z}/810\mathbb{Z}, +, \times)$. Préciser ceux qui sont maximaux.
4. Trouver les éléments nilpotents de $(\mathbb{Z}/810\mathbb{Z}, +, \times)$.
5. Trouver les idéaux maximaux de $(\mathbb{Q}[x]/(f), +, \times)$, où (f) est l'idéal principal engendré par un polynôme f.

Exercice 2. Soit I un idéal d'un anneau A. On note par $(a) = a \cdot A$ l'idéal principal engendré par a. Montrer que :

1. $I = A$ si et seulement si I contient une unité ;
2. $(a) = A$ ssi a est inversible ;
3. Un anneau A est un corps ssi (0) est le seul idéal propre de A.

Exercice 3 (Sommes et produits d'idéaux)**.**

1. Soient I, J deux idéaux d'un anneau A. Montrer que
$$I \cap J, \qquad I + J = \{x + y \,|\, x \in I, y \in J\}$$
sont des idéaux de A.
2. Montrer que $I + J$ est le plus petit idéal de A contenant I et J.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$, $I = (n) = n\mathbb{Z}$, $J = (m) = m\mathbb{Z}$. Trouver $I \cap J$ et $I + J$.
4. Montrer que
$$I \cdot J = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_k \in I,\ y_k \in J \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$$
est un idéal. Il s'appelle *produit des idéaux* I et J.

5. On considère les idéaux $I = (x_1, \dots x_n) = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ et $J = (y_1, \dots y_m) = Ay_1 + \cdots + Ay_m$. Décrire les idéaux $I + J$, $I \cdot J$, I^2 en fonction de x_k, y_l.
6. Soient A un anneau et I et J les idéaux de A. Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$ et $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$
7. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I + J = A$. Montrer que $I \cap J = I \cdot J$ si I, J sont étrangers.
8. On suppose que : $I + J = A$. Démontrer que $I^n + J^m = A$ quels que soient entiers positifs non-nuls n et m.

Exercice 4. Soit f un morphisme de l'anneau A vers l'anneau B.

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est aussi un idéal premier. Cette proposition est-elle vraie pour idéaux maximaux ?
2. Montrer par un exemple, que l'image $f(I)$ d'un idéal I de A n'est pas forcément un idéal de B. Démontrer cependant que si f est surjectif, alors $f(I)$ est un idéal pour tout idéal I de A.
3. Toujours sous l'hypothèse que f est surjective, montrer que l'image d'un idéal maximal par f est soit B tout entier, soit un idéal maximal de B.
4. Considérons la reduction de polynômes sur $\mathbb{Z}$ modulo m : $r_m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x]$ et deux idéaux premiers principaux (x) et $(x^2 + 1)$. Les idéaux $r_6((x))$ et $r_2((x^2 + 1))$ sont-ils premiers ?

Exercice 5. Soit $\sqrt{d}$ non rationnel. Dans l'anneau

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{n + m\sqrt{d} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

on definit la conjugaison $\bar{z}$:

$$\text{si } z = n + m\sqrt{d}, \text{ alors } \bar{z} = n - m\sqrt{d}.$$

On peut aussi définir la norme
$N_d : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ par $N_d(z) = z\bar{z} = (n + m\sqrt{d})(n - m\sqrt{d})$.

1. Montrer que les apllications $\bar{z}$ et $N(z)$ sont multiplicatives i.e
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}, \qquad N_d(z_1 \cdot z_2) = N_d(z_1) \cdot N_d(z_2).$$
2. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible ssi $N_d(z) = \pm 1$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
3. Montrer que si $N_d(z) = \pm p$, où p est un premier, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Donner quelques exemples d'éléments irreductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour $d = -1$, 2, -6, p, où p un premier.

4. On note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Montrer que 3 et $2+\sqrt{-5}$ sont irréductibles dans A.
5. Trouver tous les irréductibles de A de norme 9.
6. Trouver tous les diviseurs de 9 et de $3(2+\sqrt{-5})$ dans l'anneau A à association près.
7. Trouver un *pgcd* $(3, 2+\sqrt{-5})$, et montrer que 3 et $2+\sqrt{-5}$ n'ont pas de *ppcm* dans l'anneau A.
8. Montrer que l'idéal $I = (3, 2+\sqrt{-5}) \subset A$ n'est pas principal. Donc l'anneau A n'est pas principal. Est-il factoriel ?
9. Montrer que 9 et $3(2+\sqrt{-5})$ n'ont pas de *pgcd* dans A. Possèdent-ils un *ppcm* ?