Université d'Évry Val d'Essonne 2011-2012

M54 algèbre et arithmétique 2

Devoir surveillé

Cours autorisé ; durée : 1h30

Exercice 1. On considère les systèmes de congruences suivants.

$$(S)\begin{cases}5x=3 & \mod 6\\ 3x=3 & \mod 7\\ 4x=4 & \mod 32\end{cases}\qquad (S_1)\begin{cases}x=3 & \mod 6\\ x=1 & \mod 7\\ x=1 & \mod 8\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}x=15 & \mod 42\\ x=1 & \mod 8\end{cases}$$

1. Montrer que (S) est équivalent à (S_1).
2. Montrer que (S_1) est équivalent à (S_2).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbf{Z}$.

Exercice 2. On note $\mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $A = \mathbf{F}_2[X]/(X^2+1)$.

1. Écrire la liste complète des polynômes de degré 0 ou 1 dans $\mathbf{F}_2[X]$.
2. En déduire que $A = \{0, 1, i, i+1\}$ où l'on a noté i l'image de X dans A.
3. Dresser les tables d'addition et de multiplication de A.
4. Dire si A est un anneau intègre et si c'est un corps.
5. Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans A.
6. Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbf{F}_2^2$.
7. En déduire que A n'est pas isomorphe à $\mathbf{F}_2^2$.

Exercice 3. Soient E un ensemble ayant au moins 2 éléments, A un anneau non nul, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de E dans A.

1. Expliquer brièvement pourquoi $\mathcal{F}$ est un anneau. Est-il intègre ? Est-ce un corps ?
2. Pour toute partie X de E, on note I_X l'ensemble des fonctions qui s'annulent identiquement sur E, autrement dit
$$I_X = \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } f(x) = 0 \quad \forall x \in X\} .$$
Montrer que I_X est un idéal de $\mathcal{F}$.
3. Calculer $I_\emptyset$ et I_E.

Désormais X et Y désignent deux parties de E.

4. Monter que $I_X \cap I_Y = I_{X\cup Y}$.
5. Monter que $I_X \subset I_Y \Leftrightarrow X \supset Y$.
6. En déduire que $I_X + I_Y \subset I_{X\cap Y}$.
7. Soit $f \in I_{X\cap Y}$. On définit une fonction g par : $g(x) = f(x)$ si $x \in X\setminus Y$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que $g \in I_Y$ et $f - g \in I_X$.
8. En déduire que $I_X + I_Y = I_{X\cap Y}$.