Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M54 algèbre et arithmétique

Feuille 5 — Anneaux particuliers, quotients, corps finis

Exercice 1. Soit A un anneau non nul, commutatif et intègre.

1. Montrer que si A est fini, alors c'est un corps.
2. Montrer que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, alors c'est un corps (considérer les idéaux $I_n = x^n A$ pour $x \in A$ non nul).

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif non trivial et R l'intersection de ses idéaux maximaux.

1. Déterminer R dans le cas de $A = \mathbf{Z}$.
2. Montrer que $a \in A^\times$ si et seulement si a n'appartient à aucun idéal maximal de A.
3. Montrer que tout élément nilpotent de A appartient à R, et que l'ensemble des éléments nilpotents est un idéal de A.
4. Montrer que $a \in R$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$ on a $1 + ax \in A^\times$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif, et a, b deux éléments de A. Montrer que :

1. L'anneau $A[X]/(X-a)$ est isomorphe à A ;
2. L'anneau $A[X,Y]/(Y-b)$ est isomorphe à $A[X]$;
3. L'anneau $A[X,Y]/(X-a, Y-b)$ est isomorphe à A.

Exercice 4. Montrer que l'idéal $(X-a, Y-b)$ de $\mathbf{R}[X,Y]$ est maximal, pour $a, b \in \mathbf{R}$. On pourra étudier le morphisme d'anneaux $h\colon \mathbf{R}[X,Y] \to \mathbf{R}$ défini par $h(P) = P(a,b)$, pour tout $P = P(X,Y)$ de $\mathbf{R}[X,Y]$.

Exercice 5. Soit A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A. On note $I[X]$ l'ensemble des polynômes $P \in A[X]$ dont tous les coefficients appartiennent à I.

1. Montrer que $I[X]$ est un idéal de $A[X]$.
2. Construire un isomorphisme de l'anneau $A[X]/I[X]$ sur l'anneau $(A/I)[X]$.
3. Montrer que si I est premier, alors $I[X]$ est premier.
4. Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbf{Z}[X]/(p) \simeq \mathbf{F}_p[X]$.

Exercice 6.

1. Quels sont les éléments de $\mathbf{Z}$ qui sont des éléments irréductibles de $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$?
2. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas un anneau factoriel (écrire deux décompositions de 6).

Exercice 7. Soit $\mathbf{Z}[i] = a + ib \mid a, b \in \mathbf{Z}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un anneau euclidien lorsqu'on le muni de la norme $N\colon \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{N}$ définie par :
$$N(a+ib) = a^2 + b^2 \ .$$
(On remarquera que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}[i]^2$, on a $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ et on écrira explicitement la division euclidienne de deux éléments de $\mathbf{Z}[i]$.)
2. Soit $\alpha \in \mathbf{Z}[i]$. Montrer que si $N(\alpha)$ est premier dans $\mathbf{Z}$, alors α est irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.
3. Déterminer les éléments irréductibles de $\mathbf{Z}[i]$ parmi :
$$2, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 \ .$$
4. L'idéal engendré par 2 est-il premier ?

Exercice 8. Soit A un anneau principal, et x un élément non nul de A. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. x est un élément irréductible ;
2. (x) est un idéal premier ;
3. (x) est un idéal maximal.

Exercice 9. Soit K un corps fini à p^n éléments. Montrer qu'il existe dans $K[X]$ au moins un polynôme de degré p^n n'ayant aucun zéro dans K.

Exercice 10.

1. Si K est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 ou 3 dans $K[x]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans K.
2. Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
3. En utilisant la partie précédente, montrer que les polynômes $P = 5X^3 + 8X^2 + 3X + 15$ et $Q = X^5 + 2X^3 + 3X^2 - 6X - 5$ sont irréductibles dans $\mathbf{Z}[X]$.
4. Décrire tous les polynômes irréductibles de degré 4 et 5 sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 11.

1. Dans l'anneau $A = \mathbf{F}_3[X]$, montrer que $P = X^2 + 1$ est irréductible.
2. Montrer que $A/(P)$ est un corps à 9 éléments.
3. On note $\mathbf{F}_9 = A/(P)$ et α la classe de X dans $\mathbf{F}_9$. On pose $a = 1 + \alpha$ et $b = 1 - \alpha$. Calculer a^2, a^3, $a^2 + 2ab - b^2$.

Exercice 12.

1. On considère l'anneau $A = \mathbf{F}_2[X]$, et $P = X^2 + X + 1$. Montrer que P est irréductible, et en déduire que $A/(P)$ est un corps ; montrer qu'il a 4 éléments et dresser sa table de multiplication.
2. Montrer que $Q = X^3 + X + 1$ est irréductible dans A. En déduire que $A/(Q)$ est un corps ; donner son cardinal et dresser sa table de multiplication.