Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M54 algèbre et arithmétique

Feuille 4 — Idéaux

Exercice 1. Soit $A = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ l'anneau des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, et I le sous-ensemble des fonctions qui s'annulent en $1/2$. Montrer que I est un idéal de A. Est-il premier, maximal ?

Exercice 2.
1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal.
2. Montrer que l'image directe d'un idéal par un homomorphisme d'anneaux n'est en général pas un idéal. Montrer que c'en est un si le morphisme est surjectif.
3. Que peut-on dire de l'image réciproque et de l'image directe d'un idéal premier ou maximal par un homomorphisme d'anneaux (éventuellement surjectif) ?

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer que A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont (0) et (1).

Exercice 4. Soient k et k' deux corps. Montrer que $k \times k'$ est un anneau principal.

Exercice 5. Soit A un anneau commutatif, I un idéal propre de A. On appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}, x^n \in I\}$.
1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal.
2. Dans $\mathbf{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbf{Z}}$, $\sqrt{72\mathbf{Z}}$.
3. Montrer que $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.
4. Montrer que le radical de I est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent.

Exercice 6. Déterminer $I + J, I \cap J, IJ, \sqrt{I}, \sqrt{J}$ pour
1. $I = 8\mathbf{Z}$ et $J = 12\mathbf{Z}$ dans Z ;
2. $I = (X-1)$ et $J = (X)$ dans $\mathbf{Z}[X]$;
3. $I = (X^2+1)$ et $J = (X+2)$ dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 7. Déterminer tous les idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}/180\mathbf{Z}$. Lesquels sont premiers, lesquels sont maximaux ?

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif unitaire intègre tel que pour tout élément non nul a de A, l'idéal (a) est premier. Montrer que A est un corps (on prendra $b \neq 0$ et $a = b^2$). En déduire que si A est un anneau non nul dont tout idéal propre est premier, alors A est un corps.

Exercice 9 (anneaux locaux)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire qui n'est pas un corps. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La somme de deux non-inversibles est un non-inversible.
2. Les non-inversibles forment un idéal.
3. L'anneau A possède un unique idéal maximal.

Exercice 10. Soient I et J deux idéaux d'un anneau commutatif unitaire A, tels que $I + J = A$.

1. Montrer que pour tout n, on a $I^n \subset I$.
2. Montrer que $(x + y)^{2n-1} \in I^n + J^n$.
3. En déduire que $I^n + J^n = A$.

Exercice 11 (idéaux principaux)**.**
1. Montrer que l'idéal $(2, X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal.
2. Montrer que l'idéal $(5X^2, 17X^2, 3X^2 - X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ est principal.

Exercice 12 (suites croissantes d'idéaux)**.** Soit A un anneau commutatif et (I_n) une suite croissante d'idéaux.

1. Montrer que $I = \bigcup_n I_n$ est un idéal de A.
2. On suppose que A est principal. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $I = I_{n_0}$.
3. En déduire que l'anneau $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas principal. (On pourra considérer l'idéal I_n des fonctions qui s'annulent en k pour tout $k \geq n$.)

Exercice 13 (caractéristique)**.** Soit p un nombre premier et A un anneau commutatif intègre de caractéristique p.

1. Montrer que $p \cdot a = 0$ pour tout $a \in A$.
2. Montrer que p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ pour tout k compris entre 1 et $p - 1$.
3. Montrer que $(a + b)^p = a^p + b^p$, pour tous $a, b \in A$.
4. En déduire que l'application $F_p : A \to A, x \to x^p$ est un endomorphisme d'anneaux. On appelle F_p *l'endomorphisme de Frobenius.*
5. Montrer que si A est fini, alors F_p est un automorphisme.

Exercice 14. On désigne par $\mathbb{F}_q$ un corps fini ayant $q = p^n$ éléments, avec p un nombre premier. Montrer que $\forall x \in \mathbb{F}_q$ on a : $x^q = x$. Indication : Pour $x \neq 0$, appliquer le théorème de Lagrange au groupe $(\mathbb{F}_q^\times, \times)$.

Exercice 15. Soit A un anneau intègre fini de caractéristique p.

1. Montrer que $p > 0$.
2. Monter que l'on peut munir A d'une structure de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension finie. En déduire que le cardinal de A est une puissance de p.