Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M54 algèbre et arithmétique

Feuille 3 — Élements inversibles, nilpotents ; corps

Exercice 1.
1. Soit A un anneau unitaire. Montrer qu'il existe un unique morphisme f de $\mathbf{Z}$ dans A, et un unique morphisme g de A dans $\{0\}$.
2. Soient K et L deux corps, et h un morphisme de K dans L. Montrer que h est injectif.

Exercice 2.
1. Montrer que le seul endomorphisme du corps $\mathbf{Q}$ est l'identité.
2. Trouver les endomorphismes du corps $\mathbf{R}$.

Exercice 3 (Anneau produit)**.** Soient A et B deux anneaux unitaires. On définit deux lois internes sur $A \times B$ par $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$.
1. Montrer que muni de ces deux lois, $A \times B$ est un anneau. Est-il unitaire ?
2. Quels sont les éléments simplifiables, inversibles, nilpotents de $A \times B$?
3. On pose $e = (1, 0)$ et $f = (0, 1)$. Montrer que $e^2 = e$ et $f^2 = f$.

Exercice 4. Soient k et k' deux corps. Montrer que $k \times k'$ est un anneau non intègre (donc jamais un corps).

Exercice 5. Déterminer les éléments nilpotents et inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 6. On considère l'anneau $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi,\ a, b \in \mathbf{Z}\}$. Déterminer l'ensemble $\mathbf{Z}[i]^\times$ des inversibles de cet anneau.

Exercice 7. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau non nul.
1. Montrer que si x et y sont 2 éléments nilpotents de A et si x et y commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
2. Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.

Exercice 8. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau fini intègre. Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un corps.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif tel que pour tout $x \in A$, il existe un entier $n > 1$ tel que $x^n = x$.
1. Montrer que 0 est le seul élément nilpotent de A
2. Montrer que si A contient un élément non diviseur de 0, alors A est unitaire.

Exercice 10. Dans l'ensemble $M_2(\mathbf{C})$ des matrices 2×2 sur le corps des complexes, on note H la partie formée par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H est un sous-anneau unitaire de $M_2(\mathbf{C})$ (muni de la somme et du produit usuels des matrices). On note $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.
2. On pose
$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$
Vérifier que ces matrices sont dans H et que tout élément de H s'écrit de manière unique sous la forme
$$\alpha E + \beta K + \gamma I + \delta J \ ,$$
où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réels.
3. Vérifier qu'on a
$$I^2 = J^2 = K^2 = -E$$
et
$$IJ = -JI, JK = -KJ, KI = -IK \ .$$
4. Pour $Z = \alpha E + \beta K + \gamma I + \delta J$, on appelle conjugué de Z, on note $\bar{Z}$ l'élément $\bar{Z} = \alpha E - \beta K - \gamma I - \delta J$. Vérifier qu'on a
$$Z\bar{Z} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)E \ .$$
5. Conclure que H est un corps non commutatif. On l'appelle le corps des quaternions.

Exercice 11. Soit A un anneau intègre. On dit qu'un élément $\alpha \in A$ est racine de l'équation (de degré n)
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^n - 1 + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
à coefficients a_i dans A, avec $a_n \neq 0$, si on a
$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0 \ .$$

1. Montrer qu'une équation de degré 1, $ax + b = 0$ a au plus une racine que l'on déterminera.
2. Soient α et β deux racines distinctes d'une équation $P(x) = 0$ de degré n. Montrer, en mettant $(\alpha - \beta)$ en facteur dans l'expression $P(\beta) - P(\alpha)$, que β est racine d'une équation de degré $n - 1$ qu'on écrira.
3. Montrer, par récurrence sur n, qu'une équation de degré n a au plus n racines.

Exercice 12. Soit K un corps fini.

1. Si x est un élément non nul de K, montrer qu'il existe un entier d tel que $x^d = 1$.
2. Déduire de l'exercice précédent que, pour tout d, il existe au plus d éléments de K tels que $x^d = 1$.
3. Conclure que le groupe multiplicatif $K^\times$ des éléments non nuls de K est cyclique.