Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M54 algèbre et arithmétique

Feuille 2 — Anneaux, sous-anneaux

Exercice 1. 1. Donner la définition d'un anneau, d'un corps.

2. Les opérations binaires $+$ et $\cdot$ sont-elles équivalentes dans la définition ?
3. Lesquels de ces sous-ensembles donnés de $\mathbf{C}$ sont des anneaux ? Lesquels sont des corps ?
   (a) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} 10^{-n}\mathbf{Z}$;
   (b) $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^*,\ (m,n) = 1,\ p \nmid n\}$ (où p est un nombre premier fixé) ;
   (c) $\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}i$;
   (d) $\mathbf{Q}[i] = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}i$.

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire tel que tout élément de A soit idempotent, c'est-à-dire que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $2x = 0$.
2. Montrer que A est un anneau commutatif.
3. Montrer la relation $xy(x + y) = 0$, pour tous $x, y \in A$.
4. Traduire les questions précédentes pour $A = (\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$, où E est un ensemble quelconque et $\triangle$ l'opérateur de différence symétrique.

Exercice 3. Quel est le plus petit sous-anneau de $\mathbf{Q}$ contenant $1/5$?

Exercice 4. Soit $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ (respectivement $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$) le plus petit sous-anneau de $\mathbf{C}$ contenant $\mathbf{Z}$ et $\sqrt{2}$ (resp. $\mathbf{Z}$ et $\sqrt{3}$).

1. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}$.
2. Montrer que les seuls automorphismes d'anneau de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sont l'identité et l'application $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$
3. Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 5. Soit A un anneau, et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-anneaux de A. Montrer que $\bigcap_{i\in I} B_i$ est un sous-anneau de A.

Exercice 6. Soit A un anneau, et S une partie de A. Montrer que l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tout élément de S est un sous-anneau de A.