Applications linéaires

Définition

Exercice 1 Les applications suivantes, entre espaces vectoriels réels, sont-elles linéaires ? Lorsque c'est le cas, on donnera l'image, le noyau et le rang, et on en déduira si elles sont injectives, surjectives, bijectives.
$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ celui des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ayant une dérivée d-ième continue sur cet intervalle.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 5$
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$
4. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x + 4y$
7. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto sin(3x + 4y)$
8. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x - 3y + z, y - z)$
9. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(\frac{1}{2})$
10. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max\limits_{t\in[0,1]} f(t)$
11. $\mathcal{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max\limits_{t\in[0,1]} f(t) - \min\limits_{t\in[0,1]} f(t)$
12. $\mathcal{C}_1 \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(\frac{3}{4})$
13. $\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C} : f \mapsto f'$
14. $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} : f \mapsto f.g$
15. $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X] : P(X) \mapsto XP(X)$
16. $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X] : P(X) \mapsto P(X+1)$
17. $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 : P(X) \mapsto (P(1), P(2), P(3))$
18. $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 : P(X) \mapsto (P(1), P(0), P(1))$

Exercice 2 Soient f et g deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par : $f(z) = \overline{z}$ et $g(z) = \mathcal{R}e(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev mais non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-ev.

Image et noyau

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $E = Imf \oplus Kerf$.
   (b) $Imf = Imf^2$.

(c) $Kerf = Kerf^2$.

2. Si E est de dimension finie n, montrer que $Kerf = Imf \Leftrightarrow (f^2 = 0$ et $n = 2rg(f))$

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Dire en justifiant lesquelles des propositions suivantes sont vraies :

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est libre.
2. Si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est libre, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
3. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice.
4. Si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.

Exercice 5 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et φ une application linéaire de E dans F. Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si l'image par φ de toute base de E est une base de F.

Exercice 6 Soit E un ev de dimension finie. Trouver $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

1. $Kerf \cap Imf \neq \{0\}$
2. $Kerf = Imf$.
3. $Kerf$ inclus strictement dans Imf.
4. Imf inclus strictement dans $Kerf$.
5. $Kerf + Imf \neq E$.

Exercice 7 Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

1. Si $A \subset E$, alors $u(Vect(A)) = Vect(u(A))$.
2. Si $B \subset F$, alors $Vect(u^{-1}(B)) \subset u^{-1}(Vect(B))$. A-t-on l'égalité en général ?

Matrice associée à une application linéaire

Exercice 8 Déterminer les matrices associées aux homomorphismes suivants :
$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, u(x, y, z) = (3x - z, x - y + 2z, y)$
$v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, v(x, y, z, t) = (2x + 4t, x - y + z - t)$
$w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, w(x, y) = (-x + y, 3x - 2y, -y)$

Exercice 9 Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire la matrice de l'application u définie dans la base canonique par :

$$\begin{array}{rcl} u(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ u(e_2) & = & 4e_1 + 2e_3 \\ u(e_3) & = & 2e_1 - 3e_2 + e_3 \end{array}$$

dans la base formée des vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\varepsilon'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice $Mat(u, \varepsilon, \varepsilon')$ de u relativement aux bases ε et ε'.

Projecteurs et symétries

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. Un endomorphisme u de E est un projecteur si $u \circ u = u$.
1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que Im$u = \{x \in E;\ \ u(x) = x\}$ et que E =Ker$u\oplus$ Imu.
Un endomorphisme u de E est appelé involutif si $u \circ u = i_E$.
2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et E =Im$(i_E + u)\oplus$ Im$(i_E - u)$.
Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G. Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Montrer que u est involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

Exercice 12 Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. On désigne par ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base $\{e_1, e_2\}$ de P et $\{e_3\}$ une base de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ et que $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $A = \mathrm{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier que $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallélement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$ puis $B = \mathrm{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$. Vérifier que $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

Exercice 13 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :
$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \dfrac{P(-X) - P(X)}{2}$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, que $E = \mathrm{Im}\, f \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$ et que $f^2 = -f$.
On sait que si f est un projecteur, alors $E = Kerf \oplus Imf$. Déduire de ce qui précède que la réciproque de cette proposition est fausse.

Exercice 14 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p + q - pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :
$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$,
$\mathrm{Im}(p + q - pq) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

Hyperplans et formes linéaires

Exercice 15 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

1. Montrer que l'intersection de deux hyperplans de E a une dimension supérieure ou égale à $n - 2$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $p \leqslant n$, l'intersection de p hyperplans a une dimension supérieure ou égale à $n - p$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application e_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e_y(P(X)) = P(y)$ (i.e. l'application e_y est l'évaluation en y) est linéaire. Calculer la dimension de son noyau.
4. Même question avec l'application e'_y de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie en posant $e'_y(P(X)) = P'(y)$ (en désignant par P' le polynôme dérivé de P).
5. Démontrer, à l'aide de ces deux résultats, qu'il existe dans $\mathbb{R}_6[X]$ un polynôme P non nul et ayant les propriétés suivantes : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ et $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$.

Exercice 16 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle trace de A et on note $tr(A)$ le scalaire $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que l'application $tr : \mathcal{M}_n(K) \to K$ est une forme linéaire.
2. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K), f(AB) = f(BA)$;
   (b) $\exists \lambda \in K$ t.q. $f = \lambda tr$.

Espace dual

Exercice 17 Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et trouver la base duale de e.

Exercice 18 Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ les éléments de $E^\star$ définis par $\phi_1(P) = P(0), \phi_2(P) = P(1), \phi_3(P) = P'(0), \phi_4(P) = P'(1)$. Montrer que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de $E^\star$. Déterminer une base de E dont ϕ est la base duale.