Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

Exercice 1 Voici deux définitions d'opérations sur $E = \mathbb{R}^2$ d'opérations $\oplus : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dans quel(s) cas la structure $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ est-elle un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

1. $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda \odot (x, y) = (2x, 0)$.
2. $(x, y) \oplus (x', y') = (y + y', x + x')$ et $\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Exercice 2 Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ et λ réel, on pose

$$x \oplus y = xy \quad \text{et} \quad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $(E, +, \cdot)$ un expace vectoriel sur un corps K. On considère un ensemble A tel qu'il existe une bijection $f : A \to E$. Pour $a, b \in A$, et $\lambda \in K$, on pose : $a \oplus b = f^{-1}(f(a) + f(b))$ et $\lambda \odot a = f^{-1}(\lambda \cdot f(a))$. Montrer que $(A, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur K.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 4 Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur un corps K. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un sous-espace vectoriel de E ;
2. $F \neq \emptyset$ et $\forall u, v, \in F, \forall \lambda \in K, u + v \in F$ et $\lambda \cdot u \in F$;
3. $F \neq \emptyset$ et $\forall u, v, \in F, \forall \lambda, \mu \in K, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$;
4. $0_E \in F$ et $\forall v_1, \ldots, v_n \in F, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i \cdot v_i \in F$.

Exercice 5 Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$,
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\}$, pour a réel fixé
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$,
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x e^y = 0\}$,
$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 6 Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
$E_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$,
$E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$,
$E_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 0\}$,
$E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est croissante ou } f \text{ est décroissante}\}$.

Exercice 7 Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?
$E_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P' = 3\}$,
$E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 9 Soient $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels d'un K-ev E. On note $F_1 + \cdots F_k = \{v_1 + \cdots + v_k \mid \forall i, v_i \in F_i\}$.

1. Montrer que $F_1 + \cdots + F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que dans le cas $k = 2$, on a bien la même caractérisation que dans le cours.
3. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe si $\forall v_1 \in F_1, \dots, \forall v_k \in F_k$, $v_1 + \cdots + v_k = 0 \Rightarrow v_1 = \cdots = v_k = 0$. Montrer que dans ce cas, tout vecteur $v \in F_1 + \cdots + F_k$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $F_1, \dots, F_k$.
4. Montrer par récurrence sur k qu'une somme de k espaces vectoriels est directe si, et seulement si, $(V_1 + \cdots + V_{i-1}) \cap V_i = \{0\}, \forall i \in \{2, \dots k\}$.

Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 10 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Peut-on déterminer des réels x et y pour que $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 11 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 12 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(\alpha) = 1$ et $f_\alpha(x) = 0, \forall x \neq \alpha$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 13

1. Montrer que les vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.

4. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 14 Vrai ou faux ?
On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Exercice 15

1. Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ et aussi sous la forme : $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1 + X + X^2) + \delta(1 + X + X^2 + X^3)$ (calculer a, b, c, d et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels).
2. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de $\mathcal{P}_3$:
$B_1 = (1, X, X^2, X^3)$,
$B_2 = (1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3)$,
$B_3 = (1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3)$.

Exercice 16 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\i\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix}i\\1\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1+i\\1-i\\i\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 18 Soit E un K-espace vectoriel, V et W deux sous-espaces vectoriels de E. On considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V et une base $(f_1, \ldots, f_m)$ de W.

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une famille génératrice de $V + W$.
2. Montrer que si $V \cap W = \{0\}$, alors $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une base de $V \oplus W$.
3. Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une base de $V + W$, alors $V \cap W = \{0\}$.
4. Trouver un contre-exemple montrant que $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ n'est pas toujours une base de $V + W$.
5. Une suite dont les éléments sont ceux de $\{e_1, \ldots, e_n\} \cap \{f_1, \ldots, f_m\}$ est-elle une base de $V \cap W$?

Sous-espaces supplémentaires

Exercice 19 Soient $\vec{e_1} \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{e_2} \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e_3} \begin{pmatrix}3\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e_4} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e_5} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\} = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\\2\end{pmatrix}\right\}$.
2. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\}$.
3. $dim(Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\}) = 1$.
4. $Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\} + Vect\{\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\} = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect\{\vec{e_4},\vec{e_5}\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Vect $\{v_1, v_2\}$ et Vect $\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect $\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect $\{v_2, v_5\}$.

Exercice 21
1. Soit E l'ensemble des suites réeles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions paires et des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Dimension

Exercice 22 On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\ e_5 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5.
Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$, $E + F$.