Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M33 compléments d'algèbre

Feuille 5 — arithmétique dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Exercice 1. Quel est le reste dans la division euclidienne de 4725465437 par 9 ?

Exercice 2. Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement. Donner le reste modulo 11 de $a^2 - b^2$.

Exercice 3. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, $(n + 1)^5 \equiv n^5 + 1$ (5).

Exercice 4. Quel est le chiffre des unités de 20082009^{10} ?

Exercice 5.

1. Montrer que si n est un entier naturel impair, alors $10^{3n} + 1$ est divisible par 13.
2. En déduire que le nombre 102 102 001 001 est divisible par 13.
3. Montrer que si n est un entier naturel impair, alors $10^n + 1$ est divisible par 11.
4. En déduire que le nombre 1 343 113 431 est divisible par 121.

Exercice 6. Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13.

Exercice 7. Soit $a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$ l'écriture décimale d'un entier n. Montrer que

$$n \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i \ (11) \ .$$

En déduire un critère de divisibilité par 11 par analogie avec le critère de divisibilité par 9. Les nombres 6435 et 7812 sont-ils divisibles par 11 ? Pouvez-vous inventer un critère de divisibilité par 99 ?

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \geq 0$, 13 divise $4^{2n+1} + 3^{n+2}$.

Exercice 9.

1. Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1$ (8).
2. Montrer de même que tout nombre pair n vérifie $n^2 \equiv 0$ (8) ou $n^2 \equiv 4$ (8).
3. Quels sont les entiers x et y tels que $x^2 + y^2 \equiv 2$ (8) ?

Exercice 10.

1. Quels sont les entiers congrus à un carré modulo 13 ?
2. Trouver les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soient divisible par 13.

Exercice 11. Soient a et b deux entiers tels que $a^2 + b^2$ soit divisible par 11. Montrer que a et b sont divisibles par 11.

Exercice 12.

1. Calculer $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ dans $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.

2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour tout $n > 1$.

Exercice 13.

Quel est le nombre d'inversibles dans $\mathbf{Z}/521\mathbf{Z}$?

Quel est le nombre d'inversibles dans $\mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$?

Exercice 14.

1. La classe de 16 est-elle inversible dans $\mathbf{Z}/57\mathbf{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
2. La classe de 38 est-elle inversible dans $\mathbf{Z}/77\mathbf{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
3. La classe de 42 est-elle inversible dans $\mathbf{Z}/135\mathbf{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ les équations suivantes.

1. $3x \equiv 2 \ (7)$;
2. $2x \equiv 3 \ (5)$;
3. $35x \equiv 7 \ (4)$;
4. $22x \equiv 33 \ (5)$;
5. $3x \equiv 2 \ (6)$;
6. $6x \equiv 27 \ (45)$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ les systèmes suivant.

$$\begin{cases} x \equiv 4 \ (9) \\ x \equiv 2 \ (7) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 \ (6) \\ x \equiv 3 \ (11) \end{cases}$$

Exercice 17. Soit $p = 2k + 1$ un nombre premier impair. Soit a un entier non divisible par p. Montrer que $a^k \equiv 1$ ou $a^k \equiv -1$ modulo p. Application numérique : faire le tableau des restes des puissances huitièmes modulo 17.

Exercice 18. Montrer qu'il existe dans la suite $u_n = 2^n - 3$ une infinité de termes divisibles par 5 et une infinité de termes divisibles par 13, mais qu'aucun n'est divisible par 65.