Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M33 compléments d'algèbre

Indications pour la feuille 4

Exercice 5.

1. Vrai, car 19 est premier.
2. Faux : prendre par exemple $a = 2$ et $b = 3$.
3. Vrai, car 5 est premier : si $5 \mid b^2$, alors $5 \mid b$, donc $25 \mid b^2$.
4. Faux : prendre $b = 6$.
5. Vrai : si $12 \mid b^2$, alors $2 \mid b^2$ et $3 \mid b$. Comme à la question 3, on en déduite que $4 \mid b^2$. De même $3 \mid b^2$ donc $9 \mid b^2$. Comme 4 et 9 sont premier entre eux, leur produit divise b^2.
6. Faux : prendre $a = 2$, $b = 100$ et $c = 4$.

Exercice 6. On remarque tout d'abord que par définition de $n!$, pour tout $i \leq n$, on a $i \mid n! = N$.

1. Pour tout $i \leq N$, on a $i \mid N$ et $i \mid i$, donc $i \mid N + i$. Si $i \geq 2$, ceci implique que $N + i$ n'est pas premier.
2. On peut prendre $11! + 2, \ldots, 11! + 11$.

Exercice 8. On peut décomposer 2009! en produit de puissances de premier, on aura ainsi $2009! = 2^\alpha 5^\beta X$, où X ne fait intervenir que des premiers différents de 2 et 5. Comme $10 = 2 \cdot 5$, il est clair que le nombre de zéros à la fin de 2009! est le minimum entre α et β (c'est-à-dire le nombre de 10 que l'on peut fabriquer à partir des 2 et des 5 dans la décomposition de 2009!).

Ces 2 et ses 5 proviennent des multiples de 2 et des multiples de 5 qui interviennent dans la définition de $2009! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2008 \cdot 2009$. Il est clair qu'il y a beaucoup plus de multiples de 2 (un sur deux) que de multiples de 5 (un sur cinq). Il suffit donc de calculer β (on peut dire comme en chimie que les 5 sont ici le facteur limitant).

Entre 1 et 2009, il y a exactement 401 multiples de 5 (un sur 5, de 5 à $2005 = 401 \cdot 5$). Mais certains d'entre aux vont en fait apporter deux facteurs 5 : ceux qui sont multiples de 25 ; les multiples de 125 vont apporter 3 facteurs 5, et les multiples de 625 vont en apporter 4. Mas les multiples de 25 ont déjà été compté une fois parmi les multiples de 5, il suffit donc de les compter une fois de plus : il y en a 80 (un sur cinq parmi les 401 multiples de 5) ; puis 16 multiples de 125 et 3 multiples de 625.

En tout, on a donc $\beta = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$. L'écriture en base 10 de 2009! se termine donc par 500 zéros.

Exercice 9. Comme 8 et 15 sont premiers entre eux, on a $8 \mid n + 1$. Donc n est de la forme $8k - 1$ pour $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 10. 1. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

2. Ce sont les nombres de la forme $2^\alpha 3^\beta$ avec $0 \leq \alpha \leq 4$ et $0 \leq \beta \leq 3$. Ce qui laisse 5 choix possibles pour α et 4 choix indépendants pour β. Il y a donc 20 diviseurs positifs de $2^4 \cdot 3^3$.

Exercice 12. Notons n le nombre d'élèves ; l'énoncé dit que $3 \mid n-2$, que $5 \mid n-2$ et que $7 \mid n-2$. Comme 3, 5 et 7 sont premiers entre eux deux à deux, ceci implique que le produit, 105, divise $n-2$. Comme $100 \leq n \leq 200$, on a $n = 107$.

Exercice 13. On a $n = 137q + 131 = 143q + 5$. C'est un équation d'inconnue q, que l'on résout : on trouve $q = 23$, donc $n = 137 \cdot 23 + 131$.

Exercice 14. Si $p \mid n$ et $p \mid n+1$, alors $p|(n+1) - n$ donc $p|1$. Ainsi, le seul diviseur positif commun de n et $n+1$ est 1 : c'est donc leur pgcd.

Exercice 15. Si $\operatorname{pgcd}(m,n) = 3$, alors $3 \mid m$ et $3 \mid n$ donc $3 \mid m+n$. Or 101 n'est pas multiple de 3.

Exercice 16. On cherche une combinaison linéaire de $2k+1$ et $9k+4$ qui fasse disparaître les k. La plus simple est $9(2k+1) - 2(9k+4) = 1$. D'après le théorème de Bézout, cette relation prouve que 1 est le pgcd de $2k+1$ et $9k+4$.

On procède de même : $9(2k-1) - 2(9k+4) = -17$. Ceci implique que le pgcd divise -17. Or , 17 étant premier, ceci signifie que ce pgcd est 1 ou 17. La valeur précise dépendra que k : par exemple, pour $k = 1$ on a $\operatorname{pgcd}(1, 13) = 1$, mais pour $k = 9$, on a $\operatorname{pgcd}(17, 85) = 17$.

Exercice 17. Soit p un nombre premier divisant $a+b$ et ab. Comme $p \mid ab$, on a $p \mid a$ ou $p \mid b$. Mais comme $p \mid a+b$, par soustraction on voit que dans les deux cas, $p \mid a$ et $p \mid b$. Mais, par hypothèse, a et b sont premiers entre eux donc $p = 1$. Ainsi, aucun nombre premier ne divise $\operatorname{pgcd}(a+b, ab)$, qui est donc égal à 1.

Exercice 18. Le premier cycliste parcourt la piste en 198 secondes, le deuxième en 225 secondes. Il se retrouvent ensemble sur la ligne de départ au bout de $\operatorname{pgcd}(198, 225)$ secondes.

Exercice 19. On applique la même méthode qu'à l'exercice 11, traité en TD. On voit tout de suite que la deuxième équation n'a pas de solution. Par l'algorithme d'Euclide, on trouve qu'une solution particulière de la première équation est $56 \cdot 2 - 35 \cdot 3 = 7$. La solution générale est $(5k+2, -8k-3)$ pour $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 20. Pas de corrigé pour cet exercice. Vous pouvez toujours me demander des indications en TD ou par mail si vous le désirez.