Université d'Évry Val d'Essonne 2009-2010

M33 compléments d'algèbre

Feuille 3 — morphismes, groupes engendrés, ordres

Exercice 1. Dans $(\mathbf{Z}, +)$, determiner les sous-groupes $G_1 = \langle 2\rangle$, $G_2 = \langle 3\rangle$, $G_3 = \langle 2, 3\rangle$, $G_4 = \langle 2, 4\rangle$. Faire de même dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Exercice 2. Dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$, calculer l'ordre de chaque élément et le sous-groupe qu'il engendre.

Exercice 3. Dans $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$, calculer l'ordre des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On se place dans $GL_2(\mathbf{R})$, le groupe multiplicatif des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels, et on considère l'ensemble $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), p \in \mathbf{Z} \right\}$.

1. (a) Montrer que H est un sous-groupe abélien.
   (b) Montrer qu'il est monogène.
2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A et B appartiennent à $SL_2(\mathbf{R})$, calculer leur ordre et montrer que H est contenu dans $\langle A, B\rangle$.
   (b) Le groupe engendré par A et B est-il abélien ?
   (c) Calculer l'intersection du groupe cyclique engendré par A et du groupe cyclique engendré par B.

Exercice 5. Soit G un groupe fini. Montrer que pour tous a et b du groupe G on a :

1. a et a^{-1} ont même ordre ;
2. a et bab^{-1} ont même ordre ;
3. ab et ba ont même ordre.

Exercice 6. Déterminer les sous-groupes de $\mathbf{Z}$.

Exercice 7. Trouver des contre-exemples prouvant que les affirmations suivantes sont fausses :

1. Soit G un groupe. Si l'ordre de tout élément de G divise n, alors l'ordre de G divise n.
2. Soit G un groupe fini. Si tout sous-groupe de G est cyclique, alors G est cyclique.

Exercice 8. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G ; on note $HK = \{ab \mid a \in H, b \in K\}$.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
3. Montrer que si HK est un sous-groupe de G alors $HK = \langle H, K \rangle$.
4. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 9 (Groupes divisibles et morphismes)**.** *Définition :* On dit qu'un élément g d'un groupe G est indéfiniment divisible si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un élément h de G tel que $h^n = g$.

1. Quels sont les éléments indéfiniment divisibles de $(\mathbf{Q}, +)$? de $(\mathbf{Q}_+^*, \times)$?
2. Soit $f : (\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{Q}_+^*, \times)$ un morphisme de groupes. Pour tout entier $n > 0$, calculer $f(n)$ puis $f(1/n)$ en fonction de $f(1)$.
3. Montrer que f est constant.
4. En déduire que $(\mathbf{Q}, +)$ et $(\mathbf{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.