Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 maths-info groupes 1, 2, 5 et 6
LM223 maths groupes 1 et 2

Feuille 9

Exercice 1. Trouver une rotation $P \in O^+(3)$ qui diagonalise la forme quadratique suivante :

$$q\ : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto q(X) = x^2 - 16xy + 8xz + y^2 + 8yz + 7z^2.$$

En déduire la signature de q.

Exercice 2. Diagonaliser dans une base orthonormée *pour le produit scalaire usuel* les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la forme quadratique suivante :

$$q\ : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto q(X) = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz + z^2.$$

Dans une base orthonormée (*pour le produit scalaire usuel*) bien choisie, décrire géométriquement l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1\}.$$

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E et F un sous-espace de E. On suppose que $u(F) \subset F$. On note ${}^t u$ l'adjoint de u. Montrer que l'on a alors :

$${}^t u(F^\perp) \subset F^\perp.$$

Exercice 5. On considère dans $\mathbf{R}_2[X]$ les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2, \quad \text{si } P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \text{ et } Q = b_0 + b_1X + b_2X^2, \\ (P|Q) &= \int_0^1 P(t)Q(t)dt. \end{aligned}$$

On note D l'opérateur de dérivation. Calculer l'adjoint de D *pour le produit scalaire* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. On définit l'endomorphisme A par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(1) & = & 12X - 6, \\ A(X) & = & 30X^2 - 24X + 2, \\ A(X^2) & = & 30X^2 - 26X + 3. \end{array} \right.$$

Montrer que A est l'adjoint de D *pour le produit scalaire* $(\cdot | \cdot)$.