Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 maths-info groupes 1, 2, 5 et 6
LM223 maths groupes 1 et 2

Feuille 8

Exercice 1. 1. Lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont orthogonales ?

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2. Pour toute matrice orthogonale de 1., décrire géométriquement l'isométrie correspondante de $\mathbf{R}^2$.
3. Écrire les isométries de 2. sous leur forme complexe.

Exercice 2. Pour $w = u + iv$ un nombre complexe, on note

$$M(w) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

la matrice représentant l'application de multiplication par w.

Déterminer les vecteurs propres de la matrice $M(w)$. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. 1. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour chacune des matrices de 1., décrire géométriquement l'isométrie de $\mathbf{R}^3$ correspondante.

Exercice 4. Soit $A \in O(3)$ une matrice orthogonale de $M_3(\mathbf{R})$ de déterminant -1. Montrer que -1 est valeur propre de A.

Exercice 5. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on note P le plan d'équation

$$x + y + z = 0.$$

Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P.