Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 maths-info groupes 1, 2, 5 et 6
LM223 maths groupes 1 et 2

Feuille 7

Exercice 1. Faire l'étude complète de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie par :

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 2xz + 2xt + yz + ty + z^2 + 3zt + t^2 \ .$$

Exercice 2. Montrer que toute forme quadratique définie est non-dégénérée. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ donnée par $q(x,y) = x^2 - y^2$.

1. Donner son rang et sa signature. Est-elle dégénérée ? Est-elle définie ?
2. Calculer et dessiner son cône isotrope.
3. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose $D_a = \mathrm{Vect}(\binom{1}{a})$ la droite de pente a passant par l'origine, et $D_\infty = \mathrm{Vect}(\binom{0}{1})$ la droite verticale passant par l'origine. Montrer que $D_a^\perp = D_{1/a}$, $D_0^\perp = D_\infty$ et réciproquement $D_\infty^\perp = D_0$.
4. Trouver une valeur de a telle que $D_a + D_a^\perp \neq \mathbf{R}^2$ et $D_a \cap D_a^\perp \neq \{0\}$.

Exercice 4. On considère $E = \mathcal{C}([-1;1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1;1]$ à valeurs réelles, muni de la forme quadratique

$$q : f \mapsto \int_{-1}^{1} t f^2(t) dt \ .$$

Montrer que les fonctions paires ou impaires sont des vecteurs isotropes de q.