Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 maths-info groupes 1, 2, 5 et 6
LM223 maths groupes 1 et 2

Feuille 6

Exercice 1. On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 \ .$$

On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; montrer que (X, Y, Z) est une base orthonormale pour q.

Exercice 2. Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\Big| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \Big| \leqslant n \ .$$

[Indication : que vaut ${}^tXAX$ si $X = (1, \ldots, 1)$?]

Exercice 3. Sur l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, on considère la forme bilinéaire définie par : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire. On note $\| \cdot \|_2$ la norme associée.
2. On pose par ailleurs $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrer que pour tout f de E, on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$.

Exercice 4. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel,
2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Remarque : les polynômes obtenus à la question 2 sont connus sous le nom de polynômes de Legendre.

Exercice 5. Dans $\mathbf{R}[X]$, vérifier que la formule $\langle f, g \rangle = \int_0^1 xf(x)g(x)dx$ définit bien un produit scalaire. Appliquer alors la méthode de Gram-Schmidt aux éléments $1, X, X^2$ de $\mathbf{R}[X]$ muni de ce produit scalaire.

Exercice 6. Sur $\mathbf{R}^3$, montrer que la forme

$$f : (x, y) \mapsto (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

est un produit scalaire.

1. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. À l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base canonique de $\mathbf{R}^3$ pour le produit scalaire f.
3. Donner sans calcul la matrice de f dans la nouvelle base ainsi obtenue.