Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 maths-info groupes 1, 2, 5 et 6
LM223 maths groupes 1 et 2

Feuille 4

Exercice 1. Trouver les formes polaires et le rang des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^4$

1. $q(x, y, z, t) = xy + y^2$
2. $q(x, y, z, t) = xy + zt + t^2$
3. $q(x, y, z, t) = x^2 - y^2 + z^2 - t^2$

Exercice 2. Soit $f(x, y) = x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$
Montrer que f est bilinéaire symétrique.

Exercice 3. Soit q la forme quadratique sur un $\mathbb{K}$-ev associée à la forme bilinéaire symétrique f.

1. Vérifier que $f(u, v) = \frac{1}{2}\left(q(u + v) - q(u) - q(v)\right)$ (forme polaire de f)
2. Montrer que $\forall(x, y, z) \in E^3$, on a

$$q(x + y) + q(y + z) + q(z + x) = q(x) + q(y) + q(z) + q(x + y + z)$$

Exercice 4. Soit $q(x) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$ sur $\mathbb{R}^3$ Déterminer son rang et son noyau. Est-elle non dégénérée ?

Exercice 5. Soient A et B symétriques telles que $\forall$ X $\in \mathbb{R}^4$, ${}^tXAX = {}^tXBX$ (*)

1. Soient X, Y $\in \mathbb{R}^4$, en appliquant (*) à X, Y et X+Y, montrer que ${}^tXAY = {}^tXBY$
2. En remplaçant X et Y par des vecteurs de la base canonique, en déduire que A=B

Exercice 6. Décomposer en sommes de carrés de formes linéaires indépendantes les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ suivantes

1. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$
2. $q(x, y, z) = xy + 3xz$