Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 groupes 1, 2, 5 et 6

Feuille 3

Dans toute la feuille, si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et n un entier $\geqslant 2$, on désigne par $\mathcal{L}_n(E)$ l'espace des formes n-linéaires sur E, c'est-à-dire l'espace des formes multilinéaires de E^n dans $\mathbf{K}$.

1 Formes multilinéaires

Exercice 1. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, n un entier $\geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}_n(E)$.

1. Montrer que f est alternée si, et seulement si, f est antisymétrique.
2. Montrer que si f est alternée, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ avec $i < j$, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Exercice 2. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). On note $\mathcal{S}_2(E)$ (resp. $\mathcal{A}_2(E)$) l'espace des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) de E. Montrer que :

$$\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E).$$

Exercice 3. Dans chacun des exemples suivants, montrer que φ est un produit scalaire sur E.

1. $E = \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$,
2. $E = M_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}({}^t AB)$,
3. $E = \mathbf{R}_n[X]$, $n \geqslant 2$ et $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$,
4. $E = \ell^2(\mathbf{N}) = \big\{u = (u_n)_n \in \mathbf{R} \,\big|\, \sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2 < +\infty\big\}$ et $\varphi(u, v) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.
   [Dans le 4., commencer par montrer que φ est bien définie.]

Exercice 4. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$, on pose

$$\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB).$$

1. La forme φ est-elle bilinéaire ? symétrique ?

2. Si $A = ((a_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = ((b_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} b_{ji}.$$

3. Supposons à présent, A symétrique et B antisymétrique. Montrer alors :
   - $\varphi(A, A) \geqslant 0$,
   - $\varphi(B, B) \leqslant 0$,
   - $\varphi(A, B) = 0$.
4. La forme φ est-elle un produit scalaire ?

Exercice 5. On considère l'application suivante définie sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$:

$$\big((x, y, z), (x', y', z')\big) \mapsto \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = (x, y, z) \wedge (x', y', z').$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire alternée.
2. Montrer que si $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$, alors :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{e_1} &= 0, \\ (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{e_2} &= 0. \end{aligned}$$

3. En déduire que, si e_1 et e_2 sont linéairement indépendants,

$$\operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2})^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, (\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{x} = 0 \right\}$$

.

Application. Déterminer une équation du plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -3)$ et $\overrightarrow{e_2} = (-2, 0, 1)$.

Exercice 6. On reprend le produit scalaire 3. de l'exercice 3 avec $n = 2$:

$$\forall\, P,\, Q \in \mathbf{R}_2[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Faire de même dans la base $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$.