Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 groupes 1, 2, 5 et 6

Corrigé feuille 2

Exercice 3. Déterminant de Vandermonde

1. Si deux a_i sont égaux, on peut sans restriction supposer $a_1 = a_2$. Dans ce cas les lignes 1 et 2 de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
son identiques. En particulier, son déterminant $V(a_1,\dots,a_n)$ est nul. Par ailleurs, le produit
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i) = \underbrace{(a_2-a_1)}_{=0}\prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\(i,j)\neq(1,2)}}(a_j-a_i)$$
est également nul. D'où la formule dans ce cas.
2. Pour $n = 2$, on a directement
$$V(a_1,a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$
Pour $n = 3$, on a un déterminant de taille 3×3 à calculer. On fait donc des opérations élémentaires. L'énoncé de la question 3. (qui concerne le cas où n est quelconque) nous suggère de faire un développement par rapport à la dernière ligne. On fait donc des opérations sur les colonnes.
$$\begin{aligned} V(a_1,a_2,a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \underset{C_3 \leftarrow C_3 - a_3C_2}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2-a_3a_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2-a_3a_2 \\ 1 & a_3 & 0 \end{vmatrix}} = \underset{C_2 \leftarrow C_2 - a_3C_1}{\begin{vmatrix} 1 & a_1-a_3 & a_1^2-a_3a_1 \\ 1 & a_2-a_3 & a_2^2-a_3a_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \\ &= \begin{vmatrix} a_1-a_3 & a_1^2-a_3a_1 \\ a_2-a_3 & a_2^2-a_3a_2 \end{vmatrix} \quad \text{(développement par rapport à la dernière ligne)} \\ &= (a_1-a_3)(a_2-a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_2-a_1) \\ &= (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1). \end{aligned}$$

On peut également choisir de faire des opérations élémentaires sur les lignes pour développer le déterminant par rapport à la première colonne. On obtient bien sûr le même résultat même si les calculs sont un peu plus longs.

3. Pour le cas général, on procède exactement comme dans la question précédente avec $n = 3$.

$$\begin{aligned}
V(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \underset{C_n \leftarrow C_n - a_n C_{n-1}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_n a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}} \\
&= \dots = \underset{C_2 \leftarrow C_2 - a_n C_1}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1^2 - a_n a_1 & \dots & a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 - a_n & a_2^2 - a_n a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_n a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}} \\
&= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1^2 - a_n a_1 & \dots & a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} \\ a_2 - a_n & a_2^2 - a_n a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_n a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}^2 - a_n a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} - a_n a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{(-1)^{n+1}(a_1 - a_n)\cdots(a_{n-1} - a_n)}_{= \prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (a_n - a_i)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= V(a_1,\dots,a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i).
\end{aligned}$$

4. La formule cherchée est vraie pour $n = 2$ d'après la question 2. Supposons la vraie pour $n - 1 \geqslant 1$. Soient $a_1,\dots,a_n$ n réels distincts (s'il sont égaux la formule est encore vraie avec la question 1.). Alors d'après la question précédente, $V(a_1,\dots,a_n) = V(a_1,\dots,a_{n-1}) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (a_n - a_i)$. Or par hypothèse de récurrence, $V(a_1,\dots,a_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (a_j - a_i)$, donc :

$$\begin{aligned}
V(a_1,\dots,a_n) &= V(a_1,\dots,a_{n-1}) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (a_n - a_i) \\
&= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (a_n - a_i).
\end{aligned}$$

C'est la formule au rang n. D'où la formule pour tout n par récurrence.

5. En développant le déterminant $V(a_1,\dots,a_{n-1},X)$ par rapport à la dernière ligne, on constate que c'est un polynôme en X de degré $n-1$. Son coefficient dominant est

$V(a_1,\dots,a_{n-1})$. Il a de plus, $n-1$ racines évidentes qui sont les réels $a_1,\dots,a_{n-1}$. En factorisant, on obtient :

$$V(a_1,\dots,a_{n-1},X) = V(a_1,\dots,a_{n-1}) \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1} (X-a_i).$$

En donnant à l'indéterminée X la valeur a_n, on obtient la formule de la question 3. et on conclut alors comme avant.

Exercice 4. Critères de diagonalisabilité

1. On reprend les matrices de l'énoncé avec les notations suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices A, D, E et F sont symétriques. Elles sont donc diagonalisables. Le polynôme caractéristique de la matrice G est $P_G(X) = -X(X^2-X-1)$. Il a trois racines réelles distinctes. La matrice G étant de taille 3×3, elle est diagonalisable. Le polynôme caractéristique de la matrice B est $P_B(X) = X^2-4X+8$. La matrice B n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (en revanche elle l'est sur $\mathbf{C}$).
En revanche la matrice C a pour polynôme caractéristique $P_C(X) = X^2$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1. La matrice C n'est donc pas diagonalisable.

2. On vérifie que la matrice $A_t = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si, $t > -4$. En effet, son polynôme caractéristique $P_{A_t}(X) = X^2-2X-t-3$ a deux racines réelles distinctes si, et seulement si, $t>-4$. Pour $t=-4$, 1 est racine double de P_{A_t} et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Elle n'est donc pas diagonlisable. D'où le résultat.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 5. On vérifie que $P_M(X) = -(X-1)(X-2)(X+4)$ et

$$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad E_{-4} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est diagonalisable et la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres ci-dessus est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 12 & 14 \\ 4 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit λ une valeur propre de A vérifiant $A^2 - 5A + 6\mathbf{I} = 0$. Il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$ et donc $(A^2 - 5A + 6\mathbf{I})X = 0$. D'où $(\lambda^2 - 5\lambda + 6)X = 0$. Or $X \neq 0$ donc $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ et donc $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$. Autrement dit, les valeurs propres de A sont incluses dans $\{2,3\}$.

Plus généralement, si P est un polynôme annulateur d'une matrice A (i.e. $P(A) = 0$), alors les valeurs propres de A sont dans l'ensemble des racines de P. Attention, il se peut qu'une racine de P ne soit pas valeur propre de A. Dans notre exemple si $A = 2\mathbf{I}$, elle vérifie la relation $A^2 - 5A + 6\mathbf{I} = 0$ mais 3 n'est pas valeur propre de A (2 est l'unique valeur propre de A).