Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 groupes 1, 2, 5 et 6

Feuille 2

1 Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices de l'exercice 12, feuille 1.

Exercice 2. Problèmes de carrés.

1. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -\mathbf{I}_n$. Montrer que n est pair.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in M_n(\mathbf{Q})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Déterminant de Vandermonde.

Soit n un entier non nul. Pour toutes familles de réels $a_1, \ldots, a_n$, on pose :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En utilisant judicieusement des opérations élémentaires, puis en développant par rapport à la première ligne, montrer que $V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_1)$.
4. Conclure alors par récurrence.
5. Méthode alternative pour la question 3. Vérifier que $V(a_1, \ldots, a_{n-1}, X)$ est un polynôme en X de degré $n-1$. Calculer son coefficient dominant et remarquer ses racines évidentes. Conclure.

2 Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation

Exercice 4. Critères de diagonalisibilité.

1. Dites quelles matrices sont diagonalisables parmi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\left(\begin{smallmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable sur $\mathbf{C}$?
3. Trouver une matrice complexe $A \in M_n(\mathbf{C})$ symétrique et non diagonalisable.

Exercice 5. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation choisie.

Exercice 6. Soit A une matrice vérifiant $A^2 - 5A + 6\mathbf{I} = 0$. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

3 Espace dual

Exercice 7. Dans $\mathbf{R}^2$, on considère la base $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer la base duale.

Exercice 8. Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$,
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 9. Calcul du dual de $M_n(\mathbf{C})$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que l'application $\varphi_A : M_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C},\ M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ est un élément de $M_n(\mathbf{C})^*$.
2. Montrer alors que l'application $\varphi : M_n(\mathbf{C}) \to M_n(\mathbf{C})^*,\ A \mapsto \varphi_A$ est linéaire et injective.
3. En déduire que tout élément de $M_n(\mathbf{C})^*$ s'écrit φ_A pour un unique $A \in M_n(\mathbf{C})$.