Université Pierre et Marie Curie 2005–2006

LM223 maths-info groupes 1, 2, 5 et 6
LM223 maths groupes 1 et 2

Feuille 10

Exercice 1. Dites si les applications suivantes sont des formes hermitiennes. Si c'est cas, donner leur forme quadratique hermitienne associée.

1. $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \mathrm{tr}(A\overline{B})$,
2. $X, Y \in \mathbf{C}^n \mapsto {}^tX\overline{Y}$,
3. $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \mapsto 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + 5x_2\overline{y_2}$,
4. $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \mapsto (1+i)x_1\overline{y_1} + 2x_1\overline{y_2} + 2x_2\overline{y_1} + 5ix_2\overline{y_2}$,
5. $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \mapsto x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 5x_1\overline{y_3} + 5x_3\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + ix_2\overline{y_3} - ix_3\overline{y_2} + 7x_3\overline{y_3}$,
6. $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \mapsto x_1\overline{y_2} + y_2\overline{x_1}$.

Exercice 2. Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

Exercice 3. On considère la forme quadratique q definie sur $\mathbf{C}^2$ par

$$q(x, y) = x^2 - y^2 \ .$$

Trouver une base dans laquelle la matrice de q est l'identité.

Exercice 4. Faire l'étude complète de la forme quadratique hermitienne q sur $\mathbf{C}^3$ définie par :

$$q(x, y, z) = x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} + x\bar{y} + y\bar{x} - y\bar{z} - z\bar{y} \ .$$

Exercice 5. Montrer que $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \quad a,\ c \in \mathbf{C} \text{ tels que } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

Exercice 6. Diagonaliser les matrices hermitiennes suivantes en base orthonormée pour le produit scalaire hermitien usuel :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & i \\ -i & 4 & 1 \\ -i & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 7. Montrer que la matrice suivante est unitaire et la diagonaliser en base orthonormée :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+2i & 1-i \\ -1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix} \ .$$