

**Exercice 1.** On considère l'équation

$$26a + 21b = 2, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbf{Z}^2. \quad (\star)$$

1. Donner un couple  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  vérifiant

$$26u + 21v = 1.$$

2. Résoudre l'équation  $(\star)$ .
3. En utilisant la première question, montrer que  $\overline{21}$  est inversible dans l'anneau  $\mathbf{Z}/26\mathbf{Z}$  et déterminer son inverse.

**Exercice 2.** On considère deux entiers  $a$  et  $b \geq 1$ .

1. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a$  et  $a + b$  le sont aussi.
2. Montrer que le pgcd de  $2^a - 1$  et  $2^b - 1$  est  $2^d - 1$  où  $d$  est le pgcd de  $a$  et  $b$ .

**Question de cours.** Énoncer le théorème de Lagrange.