

Exercice 1. On considère l'équation

$$26a + 21b = 2, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbf{Z}^2. \quad (\star)$$

1. Donner un couple $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant

$$26u + 21v = 1.$$

2. Résoudre l'équation (\star) .
3. En utilisant la première question, montrer que $\overline{21}$ est inversible dans l'anneau $\mathbf{Z}/26\mathbf{Z}$ et déterminer son inverse.

Exercice 2. On considère deux entiers a et $b \geq 1$.

1. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors a et $a + b$ le sont aussi.
2. Montrer que le pgcd de $2^a - 1$ et $2^b - 1$ est $2^d - 1$ où d est le pgcd de a et b .

Question de cours. Énoncer le théorème de Lagrange.