

Exercice 1. On considère l'équation

$$77a - 26b = 3, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbf{Z}^2. \quad (\star)$$

1. Donner un couple $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant

$$77u - 26v = 1.$$

2. Résoudre l'équation (\star) .
3. En utilisant la première question, montrer que $\overline{26}$ est inversible dans l'anneau $\mathbf{Z}/77\mathbf{Z}$ et déterminer son inverse.

Exercice 2. On considère la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

1. Calculer F_0, \dots, F_{10} .
2. Montrer que si a et b sont deux entiers ≥ 1 premiers entre eux, alors a et $a + b$ le sont aussi.
3. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

Question de cours 1. Qu'appelle-t'on morphisme de groupes? Définir la notion de sous-groupe.