Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 – Fonctions

Feuille 6 : corrigé

Exercice 2

Comme toujours lorsque l'on cherche une limite en $+\infty$ on fait le changement de variables, $t = 1/x$. On est alors ramené à faire un développement limité en 0 car

$$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (t \to 0).$$

1. On a $x\sin(1/x) = \sin(t)/t$. Or, $\sin t = t + t\varepsilon(t)$. Donc, $\sin(t)/t = 1 + \varepsilon(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) = 1$.

2. Lorsque $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x + 1} &= x\sqrt{1 - 1/x + 1/x^2} - x\sqrt[3]{1 + 1/x^2 + 1/x^3}\\ &= \frac{1}{t}\left(\sqrt{1 - t + t^2} - \sqrt[3]{1 + t^2 + t^3}\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{2}t - 1 + t\varepsilon(t)\right)\\ &= -\frac{1}{2} + \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x + 1} = -1/2$.

Exercice 3

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{\ln(x+1)} - \frac{a}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x\cos(x)}{\ln(1+x)} - a\right) &= \frac{1}{x}\left(\frac{x + x^2\varepsilon(x^2)}{x - x^2/2 + x^2\varepsilon(x^2)} - a\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1 + x\varepsilon(x)}{1 - x/2 + x\varepsilon(x)} - a\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x) - a\right)\\ &= \frac{1-a}{x} + \frac{1}{2} + \varepsilon(x).\end{aligned}$$

Autrement dit, $\frac{\cos(x)}{x} - \frac{a}{x}$ a une limite finie en 0 si et seulement si $a = 1$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x} - \frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. On a

$$\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x} = \frac{1}{x^3}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 - 1 - bx - cx^2\right) \tag{1}$$

Or,

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - x^2/6 + x^3\varepsilon(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon(x).$$

Donc,

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x).$$

En reportant dans l'égalité (**??**), on obtient,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x} &= \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{x^2}{2} - 1 - bx - cx^2 + x^3\varepsilon(x)\right)\\ &= \frac{1}{x^3}\left(-bx + \frac{1-2c}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)\right)\\ &= -\frac{b}{x^2} + \frac{1-2c}{2x} + \varepsilon(x).\end{aligned}$$

Autrement dit, $\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}$ a une limite finie en 0 si et seulement si $b = 0$ et $c = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}\right) = 0.$$

Exercice 4

Il s'agit d'écrire les développements limités des fonctions suivantes au point d'abscisse a donnée et à un ordre suffisant pour qu'il fasse apparaître un terme non nul d'ordre $\geqslant 2$. La courbe représentative de la fonction y aura alors un point d'inflexion si et seulement si le premier terme non nul d'ordre $\geqslant 2$ est d'ordre impair (cela implique en particulier que le terme d'ordre 2 est nul).

Lorsque l'abscisse a est différente de 0 on fera, comme toujours, le changement de variables, $h = x - a$ pour se ramener à un développement limité en 0. Dans la pratique, les exercices sont faits de la sorte que l'ordre deux ou trois suffit souvent.

1. On a

$$\begin{aligned}\ln(x) = \ln(1+h) &= h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1).\end{aligned}$$

Donc, la droite T d'équation $y = x - 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1. De plus, comme le coefficient devant $(x-1)^2$ dans le développement limité de ln en 1 est non nul, la courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de point d'inflexion en $(1,0)$ (elle est même en dessous de la droite au voisinage de ce point).

2. Ici, un développement limité d'ordre 2 n'est pas suffisant pour déterminer si la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ a, ou non, un point d'inflexion en $(0,1)$. Vérifions qu'un développement d'ordre 3 convient. Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^3}{6} + x^2\varepsilon(x).$$

Donc, la droite T d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 0. De plus, comme le coefficient devant x^2 dans le développement limité de f en 0 est nul et celui devant x^3 non nul, la courbe $\mathcal{C}_f$ y a un point d'inflexion.

Exercice 5

1. On a $f(x) = x - x + x^2\varepsilon(x) = x^2\varepsilon(x)$, donc la droite T d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe Γ au point d'abscisse 0. De plus, le point de coordonnées $(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Effectuons le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 3 :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) = \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

Or, $x^3/3$ est du même signe que x. Donc, au voisinage de $(0,0)$, Γ est au-dessus de T lorsque $x > 0$ et en dessous lorsque $x < 0$.

Exercice 6

On s'intéresse ici à des fonctions f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote T en $\pm\infty$. Pour déterminer l'équation de T (et, dans un second temps, les positions relatives de T et $\mathcal{C}_f$), on effectue le changement de variables $t = \frac{1}{x}$ et on écrit le développement limité de la fonction g définie par $g(t) = tf\left(\frac{1}{t}\right)$ lorsque $t \to 0$ suffisamment loin pour qu'il fasse apparaître un terme non nul d'ordre $\geqslant 2$. Si $g(t) = c_0 + c_1 t + c_n t^n + t^n\varepsilon(t)$, où $n \geqslant 2$ et $c_n \neq 0$, est le développement limité de la fonction g au voisinage de 0, alors, *l'équation de l'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ est $y = c_0x + c_1$ et sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$ est donnée par le signe de c_nt^{n-1}, c'est-à-dire le signe de c_nx^{n-1} : au-dessous de $\mathcal{C}_f$ si $c_nx^{n-1} > 0$ et au-dessus si $c_nx^{n-1} < 0$.*

Dans la pratique, les exercices sont faits de sorte que l'ordre 2 suffit souvent (et, sinon on vous suggère généralement avant l'ordre auquel il faut aller pour pouvoir conclure).

1. On a

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{|x|}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|t|}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{|t|}\left(1+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)\right).$$

Autrement dit, $tf\left(\frac{1}{t}\right) = \mathrm{signe(t)}(1+\frac{\mathrm{t}^2}{2}+\mathrm{t}^2\varepsilon(\mathrm{t}))$. On distingue à présent deux cas, suivant le signe de t, c'est-à-dire, suivant si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Si $t > 0$, alors, $tf\left(\frac{1}{t}\right) = 1 + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$. Donc, la droite T d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. Si $t < 0$, alors, $tf\left(\frac{1}{t}\right) = -1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$. Donc, la droite T d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

Dans les deux cas, l'asymptote est en dessous de la courbe.

2. On a

$$\begin{aligned} tf\left(\frac{1}{t}\right) &= t\frac{2}{t(1-t)}e^{t/2} \\ &= 2(1+t+t^2+t^2\varepsilon(t))\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}+t^2\varepsilon(t)\right) \\ &= 2+3t+\frac{13}{4}t^2+t^2\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Donc, la droite T d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ et se situe en dessous de la courbe en $+\infty$ et au-dessus en $-\infty$.

3. On a

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\sin t = 1 - \frac{t^2}{6} + t^2\varepsilon(t)$$

Donc, la droite T d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ et se situe au-dessus de la courbe en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

4. On a

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{e^{1/t}-e^{-1/t}}{e^{1/t}+e^{-1/t}}.$$

Distinguons à présent les cas $t > 0$ et $t < 0$.

1. Supposons $t > 0$. On a alors :

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1-e^{-2/t}}{1+e^{-2/t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1,$$

puis

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) - 1 = -\frac{2e^{-2/t}}{1+e^{-2/t}} < 0. \qquad (2)$$

De plus, par croissances comparées,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{tf\left(\frac{1}{t}\right) - 1}{t^2} = 0.$$

Autrement dit, $tf\left(\frac{1}{t}\right) = 1 + t^2\varepsilon(t)$. La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et se situe au-dessus d'après l'égalité (**??**) et le fait que x soit > 0.

2. Supposons $t < 0$. On a alors :

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{e^{2/t} - 1}{e^{2/t} + 1} \xrightarrow[t\to 0^-]{} -1,$$

puis

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) + 1 = -\frac{2e^{2/t}}{1+e^{2/t}} > 0. \qquad (3)$$

De plus, par croissances comparées,

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{tf\left(\frac{1}{t}\right) + 1}{t^2} = 0.$$

Autrement dit, $tf\left(\frac{1}{t}\right) = -1 + t^2\varepsilon(t)$. La droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et se situe au-dessus d'après l'égalité (**??**) et la fait que x soit < 0.

On remarque qu'on n'a pas pu appliquer ici le critère rappelé en introduction de l'exercice pour déterminer les positions relatives de la courbe et de son asymptote. Cela est du au fait que la fonction $t \mapsto tf\left(\frac{1}{t}\right)$ n'est pas réelle-analytique en 0, c'est-à-dire, ne coïncide pas au voisinage de 0 avec la somme de sa série de Taylor.

Exercice 7

1. La fonction f est strictement croissante en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes.

2. La fonction f étant continue, $J = f(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$ est un intervalle. De plus, comme f est strictement croissante, on a $J =]\lim_{x\to-\pi/2}(f(x)); \lim_{x\to+\pi/2}(f(x))[$ et finalement $J = \mathbf{R}$ car $\lim_{x\to\pi/2}\tan x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\pi/2}\tan x = -\infty$.

3. C'est du cours : une fonction strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection sur son image.

4. Bien que ce ne soit pas demandé explicitement, il faut justifier que la fonction g est dérivable en 0. On a $f(0) = 0$, autrement dit, on doit s'assurer que $f'(0) \neq 0$. La fonction f est dérivable par des théorèmes généraux et $f'(x) = 5(1+\tan^2 x)(\tan^4 x+1)$, donc $f'(0) = 5$. En particulier, $f'(0) \neq 0$ et la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$.

5. On ne connait pas ici d'expression explicite de la fonction g en termes de fonctions usuelles. Pour déterminer son développement limité à l'ordre 3 en 0, on va donc procéder par identification. Commençons par déterminer celui de f en $f^{-1}(0) = 0$ à l'ordre 3. On trouve $f(x) = 5x+\frac{5}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$. Notons $a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+y^3\varepsilon(y)$ le développement limité de g au voisinage de 0. En particulier,

$$g(f(x)) = x = a_0 + a_1f(x) + a_2f(x)^2 + a_3f(x)^3 + f(x)^3\varepsilon(f(x)).$$

Donc,

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\left(5x + \frac{5}{3}x^3\right) + a_2(5x)^2 + a_3(5x)^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= a_0 + 5a_1x + 25a_2x^2 + \left(\frac{5}{3}a_1 + 125a_3\right)x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, il vient alors

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 5a_1 = 1 \\ 25a_2 = 0 \\ \frac{5}{3}a_1 + 125a_3 = 0 \end{cases}$$

D'où, $g(y) = \frac{y}{5} - \frac{1}{375}y^3 + y^3\varepsilon(y)$.

6. D'après la question précédente, la droite T d'équation $y = \frac{1}{5}x$ est tangente à Γ au point d'abscisse 0. De plus, comme le terme en y^2 dans le développement limité de g en 0 est nul, le point $(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe Γ. Enfin, $-\frac{1}{375}y^3$ est du signe opposé à y, donc, la courbe Γ est au-dessus (resp. en dessous) de T lorsque y est négatif (resp. positif).