Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 – Fonctions

Feuille 6

Exercice 1. En utilisant des développement limités, calculer la limite en 0, si elle existe, de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
2. $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)}$
3. $x \mapsto \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}$
4. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^3}$
5. $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
6. $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$

Exercice 2. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ des deux expressions suivantes.

1. $x\sin(\frac{1}{x})$
2. $\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}$

Exercice 3.

1. Déterminer pour quelle valeur de a l'expression $\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x}$ admet une limite finie quand x tend vers 0.
2. Déterminer pour quelles valeurs de b et c l'expression $\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}$ admet une limite finie quand x tend vers 0.

Exercice 4. Dans les deux cas suivants, donner l'équation de la tangente en a à la courbe réprésentative de la fonction donnée, et dire si le point d'abscisse a est un point d'inflexion.

1. $x \mapsto \ln(x)$, $a = 1$
2. $x \mapsto \exp(x) - \frac{x^2}{2}$, $a = 0$

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \sin(x) - x\cos(x) \ .$$

On note Γ sa courbe représentative.

1. Calculer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
2. Étudier la position relative de T et Γ au voisinage de ce point.

Exercice 6. Trouver les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ aux courbes de chacune des fonctions suivantes, en précisant la position relative pour les grandes valeurs de x.

1. $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $\frac{2x^2}{x-1}e^{\frac{1}{2x}}$
3. $x^2 \sin(\frac{1}{x})$
4. $x\frac{e^x-e^-x}{e^x+e^-x}$

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \tan^5(x) + 5\tan(x) \ .$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Déterminer l'image J de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par f.
3. Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur J.
4. Soit $g\ : J \to I$ la réciproque de f. Calculer la dérivée de g en 0.
5. Écrire le développement limité à l'ordre 3 de g en 0.
6. On note Γ la courbe représentative de g. Donner une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Étudier la position de cette tangente par rapport à Γ au voisinage de 0.