

**Exercice 1.** Formule de TAYLOR.

1. Calculer la suite des dérivées de  $\sin$  et de  $\cos$ . À l'aide de la formule de TAYLOR, en déduire un développement limité de  $\sin$  et de  $\cos$  à l'ordre  $n$  en 0.
2. Calculer la suite des dérivées de  $x \mapsto e^x$ . En déduire un développement limité à l'ordre  $n$  de l'exponentielle au voisinage de 0.
3. On considère les fonctions  $\sinh$  et  $\cosh$  définies respectivement par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

Montrer que la dérivée de  $\sinh$  est  $\cosh$  et réciproquement. En déduire un développement limité de  $\sinh$  et de  $\cosh$  à l'ordre  $n$  en 0.

4. Établir par la formule de TAYLOR un développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction  $\arcsin$ .

**Exercice 2.** Vrai ou faux ?

1. Si une fonction admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ , alors elle admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ .
2. Une fonction continue en  $a$  admet toujours un développement limité à l'ordre 0 en  $a$ .
3. Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 0 en  $a$  est toujours continue.
4. Une fonction est dérivable en  $a$  si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ .
5. Une fonction est dérivable deux fois en  $a$  si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 2 en  $a$ .
6. Une fonction  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  est continue sur  $[-1, 1]$  si elle admet un développement limité à l'ordre  $n$  (pour tout  $n$ ) en 0.
7. Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, alors  $f$  est paire si et seulement si son développement limité à l'ordre  $n$  en 0 ne comporte que des termes pairs.
8. Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, alors  $f$  est périodique si les signes des termes de son développement sont alternés.

9. Une fonction est nulle si et seulement si son développement limité à l'ordre  $n$  en 0 est nul pour tout  $n$ .

**Exercice 3.** Questions de cours.

Donner un développement limité en 0 des expressions suivantes à l'ordre indiqué.

- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. $\sin(x)$ à l'ordre 7    | 2. $\cos(x)$ à l'ordre 7        |
| 3. $e^x$ à l'ordre 7        | 4. $\ln(1+x)$ à l'ordre 7       |
| 5. $(1+x)^{-1}$ à l'ordre 7 | 6. $(1+x)^{3/2}$ à l'ordre 5    |
| 7. $\sqrt{x+1}$ à l'ordre 5 | 8. $1+x^2-3x^3+x^4$ à l'ordre 3 |
| 9. $x^{42}$ à l'ordre 7     | 10. 0 à l'ordre 7               |

**Exercice 4.** Combinaisons linéaires.

Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 des expressions suivantes.

- |                               |                             |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $\sin(x) - x$              | 2. $\cos(x) - e^x$          | 3. $\cos(x) + \sin(x)$      |
| 4. $\frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$ | 5. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ | 6. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ |

**Exercice 5.** Développements ailleurs qu'en 0.

Donner un développement limité à l'ordre 3 en  $x_0$  des expressions suivantes.

- |                               |                               |                           |
|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| 1. $\sin(x)$ en $x_0 = \pi/2$ | 2. $\cos(x)$ en $x_0 = \pi/4$ | 3. $e^x$ en $x_0 = -1$    |
| 4. $\ln(x)$ en $x_0 = 1$      | 5. $x^2$ en $x_0 = 2$         | 6. $x^3 - x$ en $x_0 = 1$ |

**Exercice 6.** Multiplication et division par  $x$ .

Donner un développement limité à l'ordre 7 en 0 des expressions suivantes.

- |                |                     |                |
|----------------|---------------------|----------------|
| 1. $x \cos(x)$ | 2. $x^{-1} \sin(x)$ | 3. $x^5/(1-x)$ |
|----------------|---------------------|----------------|

**Exercice 7.** Multiplications en général.

Donner un développement limité en 0 des expressions suivantes à l'ordre indiqué.

- |                                   |                                       |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 4     | 2. $\cos(x)/(x+1)$ à l'ordre 4        |
| 3. $\sin(x)(1+x)^5/2$ à l'ordre 3 | 4. $(\cos(x)-1)(x^2+x^3)$ à l'ordre 7 |
| 5. $\tan(x)^7$ à l'ordre 7        | 6. $(\ln(1-x))^3(e^x-1)$ à l'ordre 7  |

**Exercice 8.** Composition.

Donner un développement limité en 0 des expressions suivantes à l'ordre indiqué.

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1. $e^{2x}$ à l'ordre 4           | 2. $\ln(1+x+2x^2)$ à l'ordre 4 |
| 3. $\sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 4 | 4. $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4  |

**Exercice 9.** Division.

Donner un développement limité en 0 des expressions suivantes à l'ordre indiqué.

- |                                    |                                      |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 | 2. $\frac{x}{\sin(x)}$ à l'ordre 4   |
| 3. $\tan(x)$ à l'ordre 5           | 4. $\frac{e^x}{\cos(x)}$ à l'ordre 3 |

**Exercice 10.** Intégration.

Donner un développement limité à l'ordre 3 de arcsin et arctan en 0.

**Exercice 11.** La totale.

Donner un développement limité en 0 des expressions suivantes à l'ordre indiqué.

- $e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$  à l'ordre 5
- $\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$  à l'ordre 3
- $\ln(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})$  à l'ordre 4
- $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  à l'ordre 3