Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 – Fonctions

Feuille 4–Suppléments

Exercice 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = (x-1)\arctan(x).$$

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2. Étudier les variations de la fonction g' sur $\mathbf{R}$.
3. On note $J = g'(]-\infty;-1[)$. Déterminer l'intervalle J.
4. Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution c et que l'on a $c \in]0;1[$.
5. Montrer que la fonction g admet un minimum en c.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = \arctan(e^x).$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
2. On note $J = f(\mathbf{R})$. Déterminer l'intervalle J.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur J.
4. Soit g l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable en tout point de J.
5. Calculer $g'(x)$.

Exercice 3. Montrer les assertions suivantes.

1. La fonction réelle définie par $f(x) = e^{\arctan(x)}$ prend la valeur 2 entre 0 et 1.
2. On a l'inégalité
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$
3. Pour tout réel $x \geq 0$, on a
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x.$$
4. Pour tous réels x et y, on a
$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|.$$