Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 – Fonctions

Feuille 4

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ continue telle que pour tout x appartenant à I, on a $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est soit la fonction constante égale à $+1$, soit la fonction constante égale à -1.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$ et déterminer $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x)$.

Exercice 3. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 \cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f_1(0) = 0;\\
f_2(x) &= \sin x \sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f_2(0) = 0;\\
f_3(x) &= \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \quad \text{si } x \neq 1 \quad \text{et} \quad f_3(1) = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 5. Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$. [Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.]
2. Posons
$$p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$
et considérons la fonction h définie pour $x \in [a,b]$ par $h(x) = f(x) - p \cdot g(x)$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

4. Application : Calculer la limite suivante.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.