Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 – Fonctions

Feuille 3

Exercice 1.

1. Soient x et y deux réels. Montrer que
$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\big(x + y + |x-y|\big).$$
2. Soient f et g deux fonctions continues en un point x_0. On définit la fonction $\max(f,g)$ par $\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que $\max(f,g)$ est continue en x_0.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur ensemble de dérivabilité et calculer leur dérivée.

$$x \mapsto \sqrt{x^2-1}; \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}; \qquad x \mapsto e^{x\ln x};$$
$$x \mapsto x^2 + 2^x; \qquad x \mapsto x^x; \qquad x \mapsto \ln\left[\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2}\right];$$
$$x \mapsto |x|^n, n \in \mathbf{N}^*; \qquad x \mapsto \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big); \qquad x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Exercice 3.

1. Montrer que les fonctions f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par
$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{1+|x|},$$
sont continues et dérivables sur $\mathbf{R}^*$.
2. Étudier leur continuité et leur dérivabilité au point 0.

Exercice 4. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$$f(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Exercice 5. Les fonctions $f(x) = x(\ln|x| - 1)$ et $g(x) = \frac{x}{\ln|x|}$ sont définies pour $x \neq 0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f et g par continuité au point 0.
2. Étudier la dérivabilité de f et g ainsi prolongées au point 0.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. La limite lorsque x tend vers 0 de $f'(x)$ existe-t-elle ?
2. Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 7. Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes, **en justifiant**, par exemple, par une petite démonstration, un résultat de cours ou un contre-exemple.

1. Soit f une fonction paire. Alors, on a $f(0) = 0$.
2. Soit f une fonction paire et dérivable. Alors, on a $f'(0) = 0$.
3. La dérivée d'une fonction impaire est impaire.
4. Il existe une fonction dérivable égale à sa dérivée.
5. Il existe une fonction dérivable f telle que f' ne soit pas continue.
6. Soit $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et $c \in [a; b]$ un extremum de f. Alors, on a $f'(c) = 0$.
7. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbf{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f'(x) = l$ existe. Alors, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
8. Un polynôme de degré 3 admet toujours une racine réelle.
9. Il existe une fonction dérivable croissante dont la dérivée est la fonction g définie par $g(x) = (x^3 - 2x + 4) \ln(2 + \cos(x))$.
10. La fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbf{R}; x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1+\ln(x)}{x}$ s'annule une et une seule fois sur $]0; +\infty[$.

Méfiez-vous des apparences ! Les notions de continuité et de dérivabilité entretiennent des liens plus subtils qu'il n'y paraît au premier abord. Il est bien connu, par exemple, qu'une fonction dérivable est continue. Il en existe en revanche qui sont continues et nulle part dérivables (essayez pour autant d'en dessiner une !). Ces dernières sont mêmes denses (en un sens à préciser) dans l'ensemble des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbf{R}$.

De même, c'est un théorème du cours que les fonctions continues vérifient le critère des valeurs intermédiaires. La réciproque est fausse, mais un théorème (de Darboux) affirme que c'est quand même le cas des fonctions dérivées. Ainsi une fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ (comme celle de l'exercice **??**) fournit un exemple de fonction non continue vérifiant pourtant le critère des valeurs intermédiaires.