Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 – Fonctions

Feuille 2

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et dire pourquoi elles y sont continues.

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x+x^2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\ln(1+\sin(x))},$$

$$f_4(x) = \ln(x) + \frac{1}{\cos(x)}, \quad f_5(x) = \sqrt{\sin(2x)}.$$

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbf{R}$. On appelle fonction indicatrice de A, la fonction $\mathbf{1}_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Représenter le graphe de la fonction $\mathbf{1}_{[0;2]}$ en précisant les points où elle n'est pas continue. Faire de même avec la fonction définie par $f = \mathbf{1}_{[0;+\infty[} - \mathbf{1}_{[-1;+1]}$.

Exercice 3.

1. Soient f et g deux fonctions réelles définies par

$$f(x) = 1 + \ln(x^2 - x - 2) \quad \text{et} \quad g(x) = e^x.$$

   Donner l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$ et déterminer son expression.

2. Pour les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2,$$

   donner l'ensemble de définition des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et déterminer leur expression.

Exercice 4.

1. Démontrer qu'une fonction dérivable est continue.
2. Une fonction continue est-elle dérivable ? Justifier votre réponse.
3. Une fonction continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
4. Une fonction constante (resp. constante par morceaux) est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$?

Exercice 5. Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes, **en justifiant**, par exemple, par une petite démonstration, un résultat de cours ou un contre-exemple.

1. Les fonctions f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par
$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2}$$
sont égales.
2. Une fonction injective est toujours strictement croissante ou strictement décroissante.
3. Il existe une fonction bijective de $\mathbf{R}_+^* =]0; +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
4. Il existe une fonction bijective de $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbf{R}$. Il en existe une de $]-1; +1[$ dans $\mathbf{R}$.
5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\arccos(\cos(x)) = x$.
6. Pour tout $x \in [-1; +1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$.
7. Soit f une fonction croissante admettant une réciproque. Alors, f^{-1} est croissante.
8. Pour tout $x \in [0; \pi]$, on a $\arccos\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)}\right) = x$.
9. La fonction $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}; x \mapsto x \ln(x)$ est prolongeable par continuité en 0.
10. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 6. La fonction réelle f définie par $f(x) = \sqrt{x(x-1)} - \sqrt{x(x+1)}$ est-elle continue en 0 ?