

**Exercice 1.** Soit  $f$  la fonction

$$f(x) = \ln(\ln(\ln(x))).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les réels  $x$  tels que
  - (a)  $f(x) = 0$ ,
  - (b)  $f(x) = 1$ .

**Exercice 2.** Indiquer le domaine de définition des fonctions suivantes et dessiner (à main levée après avoir placé quelques points) leur graphe. Lesquelles sont paires ? impaires ?

1.  $x \mapsto x^2$  ;  $x \mapsto x^3$  ;  $x \mapsto x^4$  ;
2.  $x \mapsto x^{1/2}$  ;  $x \mapsto x^{1/3}$  ;  $x \mapsto x^{1/4}$  ;
3.  $x \mapsto x^{-2}$  ;  $x \mapsto x^{-3}$  ;  $x \mapsto x^{-4}$  ;
4.  $x \mapsto x^{-1/2}$  ;  $x \mapsto x^{-1/3}$  ;  $x \mapsto x^{-1/4}$ .

**Exercice 3.** Même énoncé qu'à l'exercice précédent mais avec des fonctions exponentielles, logarithmiques ou trigonométriques.

1.  $x \mapsto e^x$  ;  $x \mapsto e^{-x}$  ;  $x \mapsto e^{|x|}$  ;
2.  $x \mapsto \cos x$  ;  $x \mapsto \sin x$  ;  $x \mapsto \cos(2x)$  ;
3.  $x \mapsto \cos(x + \pi)$  ;  $x \mapsto -\cos x$  ;  $x \mapsto \cos(x + \pi/2)$  ;
4.  $x \mapsto \ln x$  ;  $x \mapsto \ln|x|$  ;  $x \mapsto \ln(x + 1)$  ;  $x \mapsto |\ln(x + 1)|$ .

**Exercice 4.** Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations suivantes. (Des indications sont données entre crochets.)

1.  $\cos(3x) = 1/2$  [Quand a-t-on  $\cos(x) = \cos(y)$  ?],
2.  $\cos^2(x) = \sin^2(x)$  puis  $\cos^n(x) = \sin^n(x)$ , avec  $n \in \mathbf{N}^*$  [Distinguer suivant la parité de l'entier  $n$ .],
3.  $\tan^2(x) = \tan(x)$  [Quelles sont les solutions de  $\tan(x) = 0$  ?],
4.  $\ln(x^2 + 1) + 3\ln(2) = \ln(-6x)$  [ $\ln(ab) = \dots$  ?]
5.  $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$  [Trouver un trinôme du second degré dont  $e^{2x}$  est racine.].

**Exercice 5.** Répondez par Vrai ou Faux aux questions suivantes, **en justifiant**, par exemple, par une petite démonstration, un résultat de cours ou un contre-exemple.

1. La somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
2. La fonction  $f : [-2; 1] \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x^2$  est paire.
3. Toute fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est soit paire, soit impaire.
4. Il existe une fonction à la fois paire et impaire.
5. Pour tout réel  $x$ ,  $\cos^2(x) = \cos(\cos x)$ .
6. L'inverse d'une fonction est sa réciproque.
7. La somme (resp. le produit, la composée) de deux fonctions croissantes est croissante.
8. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.
9. Si  $f$  et  $g$  sont des bijections de  $\mathbf{R}$ , alors  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .
10. Si  $f$  est bijective et bornée, alors  $f^{-1}$  l'est aussi.