Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Interrogation 2

Question de cours.

1. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle (sachant que l'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est fermé et borné). En déduire le théorème des accroissements finis.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arctan, montrer que
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leqslant \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \ .$$

Exercice 1.

1. On considère la fonction $f\colon]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.
   (a) Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
   (b) Montrer que l'équation $x^2 = 2(\ln(x)+1)$ admet (au moins) deux solutions. (Indication : calculer $f(1)$.)
   (c) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition. En déduire que l'équation précédente a *exactement* deux solutions.
   (d) Vérifier qu'on a toujours $f''(x) > 2$.
   (e) Montrer que pour tout réel $a > 1$, on a $f(a) > (a-1)^2$. (Indication : utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, c'est-à-dire dont le reste fait intervenir f''.)
2. On introduit une nouvelle fonction g définie par
$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{f(x)} & \text{si } x \in]0,1[\\ \sqrt{f(x)} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases} .$$
   (a) Montrer que g est continue partout où elle est définie, et dérivable (au moins) sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Calculer sa dérivée sur chacun de ces deux intervalles.
   (b) En utilisant un développement limité de f à l'ordre deux en 1, montrer que g est dérivable en 1, calculer $g'(1)$ et vérifier que g' est continue en 1.