Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 9 : fonctions de deux variables

Exercice 1. Dans le plan muni de coordonnées x et y, représenter les trois régions définies par les conditions suivantes : (a) $xy < 0$, (b) $0 \leqslant xy < 1$, (c) $xy > 1$.

Exercice 2. Dans le plan muni de coordonnées x et y, représenter la courbe d'équation $y = 3x^2 + 6x$. Représenter alors graphiquement l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x, y) = \sqrt{y - 3x^2 + 6x}$.

Exercice 3. Déterminer et représenter dans le plan le domaine de définition de chacune des fontions suivantes.

$$f_1(x,y) = \sqrt{x+y} \qquad f_2(x,y) = \frac{\sqrt{x-y}}{x} + \ln(x) \qquad f_3(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$$f_4(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2y-x^2}} \qquad f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} \qquad f_6(x,y) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{3-y^2}$$

Exercice 4. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes, après avoir expliqué pourquoi elles existent.

$$f_1(x,y) = xy, \quad f_2(x,y) = \arctan(x - 3y^2), \quad f_3(x,y) = e^{xy}\sin(x+y), \quad f_4(x,y) = x^y$$

Exercice 5. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au-dessus du point a, ainsi qu'un vecteur normal à ce plan, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ et $a = (1, 2)$;
2. $f(x,y) = e^x y$ et $a = (-1, 1)$;
3. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^4}$ et $a = (2, 1)$;
4. $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ et $a = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercice 6. (Examen, janvier 2007)

On considère la fonction de deux variables f définie par

$$f(x,y) = \sqrt{\arctan(x) - \arctan(y)} + (x-y)^2 \ .$$

Donner son domaine de définition. Écrire ensuite une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $\left(1, 0, \sqrt{\frac{\pi}{4}} + 1\right)$.

Exercice 7. Représenter les lignes de niveau pour les valeurs 0, 1 et 2 des fonctions f_1, f_4 et f_5 de l'exercice 3.

Exercice 8. Étudier la continuité de la fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$ chacune des formules suivantes.

1. $f(x,y) = e^{x+y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Exercice 9. Soit la fonction définie, pour $(x,y) \neq (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \ .$$

1. Montrer que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$.
2. Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.
3. On pose désormais $f(0,0) = 0$. Montrer que f a des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que f n'est pas continue en 0.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de f par rapport à x et y au point $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable (différentiable) au point $(0,0)$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$.

1. Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à f au point $a = (2,1,0)$.
2. Soit $\varphi(x)$ une fonction telle que au voisinage de a on ait

$$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x) \ .$$

Donner $\varphi(2)$. En dérivant deux fois l'égalité $f(x,\varphi(x)) = 0$ et en prenant $x = 2$, calculer $\varphi'(2)$ et $\varphi''(2)$. En déduire le développement limité de φ en 2 à l'ordre 2.