Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 8 (un corrigé partiel)

Exercice 1

Ce premier exercice ne comporte que des équations différentielles du premier ordre homogènes. Ici, le mot homogène signifie que l'équation peut se mettre sous la forme $f(x)y' + g(x)y = 0$. *Pour cette raison, les équations homogènes sont aussi parfois appelées équations « sans second membre ».*

La méthode de résolution de ces équations est toujours la même : on commence par mettre l'équation sous la forme $y' = h(x)y$. *Si vous connaissez bien vos règles de dérivations, vous constaterez sans peine que si* H *est une primitive de* h *(c'est-à-dire si* $H' = h$*), alors la fonction donnée par* $y(x) = e^{H(x)}$ *est une solution de l'équation différentielle. Il est un peu plus difficile de montrer (mais cela a été fait en cours, vous n'avez pas à le redémontrer) que c'est « essentiellement » la seule : tout autre solution est de la forme* $y(x) = Ae^{H(x)}$, *où* A *est une constante réelle.*

Sur la constante, on peut faire la remarque suivante : étant donné une fonction h, *si* H *est une de ses primitives, les autres sont de la forme* $x \mapsto H(x) + a$, *ou* a *est une constante. La solution générale de l'équation différentielle est donc bien* $y(x) = e^{H(x)+a} = Ae^{H(x)}$ *avec* $A = e^a$. *Passons maintenant à la pratique.*

1. Cette équation est équivalente à $y' = -\frac{3}{2}y$. Pour la résoudre, il suffit donc de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{3}{2}$. Une primitive de cette fonction est donnée par $x \mapsto -\frac{3}{2}x$. Une solution de l'équation différentielle de départ est donc $y(x) = e^{-3x/2}$. La solution générale est $y(x) = Ae^{-3x/2}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

2. Cette équation est équivalente à $y' = (-x-1)y$. Une primitive de la fonction $x \mapsto -x-1$ est donnée par $x \mapsto -x^2/2 - x$. La solution générale de l'équation différentielle est donc $y(x) = Ae^{-x^2/-x}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

3. Cette équation est équivalente à $y' = 2xe^{x^2}y$. Il s'agit donc de trouver une primitive de $x \mapsto xe^{x^2}$. On constate que cette fonction est du type $f(x) = g'(x)e^{g(x)}$, avec $g(x) = x^2$. Or on sait bien (c'est la base de la résolution des équations différentielles du premier ordre) qu'une primitive d'une telle fonction est $x \mapsto e^{g(x)}$. Dans notre cas, la primitive recherchée est donc $x \mapsto e^{x^2}$ (la dériver pour voir si vous n'êtes pas convaincus). La solution générale de l'équation différentielle de départ est donc $y(x) = Ae^{e^{x^2}}$, où $A \in \mathbf{R}$.

4. Il ne faut pas se laisser impressionner par la présentation de cette équation : elle est bien homogène. On commence donc par la mettre sous la forme $y' = \frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}y$. Il s'agit alors d'intégrer la fraction rationnelle qui apparaît. Ça a l'air difficile à première vue, mais on peut regarder si ça se simplifie : comme l'énoncé est fait pour, c'est le cas et on a $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+1} = x^2 + 1$, ce qui est vrai pour toutes les valeurs de x, car le dénominateur ne s'annulle pas sur $\mathbf{R}$. Maintenant, c'est facile une primitive du polynôme en question est $x^3/3 + x$. La solution générale de l'équation différentielle de départ est donc $y(x) = Ae^{x^3/3+x}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

Deux remarques sur les deux dernières questions : la première est que l'étape de calcul d'une primitive est en général la plus difficile dans la résolution d'une ED homogène du premier ordre. En général, il y a beaucoup de fonctions qu'on ne sait pas du tout intégrer. En pratique, les exercices seront choisis pour que ce soit faisable. Donc, essayez, il y a toujours un truc.

La deuxième remarque est plus mathématique. Pour mettre sous la forme $y' = a(x)y$, *il faut diviser par une fonction. Il est alors très important de vérifier que cette fonction ne s'annule jamais. Si elle s'annule, il faut résoudre l'équation séparément sur chaque intervalle où elle ne s'annule pas, puis voir si les solutions se recollent.*

Exercice 2

On commence ici (et pour les deux prochains exercices) les équations inhomogènes, toujours du premier ordre. Une équation inhomogène est de la forme $f(x)y' + g(x)y = h(x)$ *où* h *est non nulle. On appelle équation homogène associée l'équation* $f(x)y' + g(x)y = 0$. *Je ne vais pas refaire tout le cours, mais il faut en retenir les points suivants.*

1. *Pour résoudre une équation inhomogène, on commence par considérer l'équation homogène associée, et la résoudre.*
2. *On doit ensuite trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, ce qui peut se faire par la méthode dite de variation de la constante.*
3. *La solution générale de l'équation de départ est alors la somme de la solution particulière trouvée et de la solution générale de l'équation homogène associée.*

La méthode « de variation de la constante » consiste, une fois qu'on a trouvé la solution générale de l'équation homogène associée, de la forme $y(x) = Ke^{A(x)}$, *à chercher une solution particulière de l'équation de départ sous la forme* $y(x) = c(x)e^{A(x)}$ *(en remplaçant la constante* K *par la fonction* c, *d'où le nom). Il s'agit alors de calculer la dérivée de cette expression, et de remplacer dans l'équation.*

Les termes en $c(x)$ doivent *alors se simplifier (s'il n'y a pas de simplification, vous avez fait une erreur de calcul), et on se retrouve avec une équation de la forme* $c'(x) = l(x)$. *La fin de la méthode consiste donc à calculer une primitive de la fonction* l *obtenue.*

Selon l'humeur du rédacteur de l'exercice, vous pouvez être plus ou moins guidés pour résoudre une équation inhomogène. (C'est le cas pour les trois exercices de cette feuille.) Ce *n'est pas une règle générale : vous êtes censés connaître la méthode et pouvoir l'appliquer sans aide.*

1. On trouve $\phi'(x) = \frac{-x}{1+x^2}$.

2. C'est une brave équation homogène comme celles de l'exercice 1 : pas de problème. Elle est équivalente à $y' = \frac{-x}{1+x^2}y$ (on peut diviser ainsi, car le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbf{R}$). Sans surprise, la première question nous fournit la primitive de la fraction rationelle rencontrée. La solution générale de cette équation différentielle homogène est donc $y(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = A(1+x^2)^{-1/2} = A/\sqrt{1+x^2}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

3. On applique la méthode de la variation de la constante, et on cherche une solution sous la forme $y(x) = c(x)/\sqrt{1+x^2}$, où c est une fonction à déterminer. On commence par calculer y', on trouve

$$y'(x) = \frac{c'(x)\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}c(x)}}{1+x^2} .$$

On remplace alors dans l'équation, on trouve ainsi :

$$c'(x)\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}c(x) + x\frac{c(x)}{\sqrt{1+x^2}} = x ,$$

et constate (c'est rassurant), que les termes en c se simplifient, pour laisser au final $c'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. On remarque alors, si on est attentif, qu'on a déjà rencontré cette expression lors du calcul de y' : on peut donc sans problème l'intégrer en $c(x) = \sqrt{1+x^2}$. Ainsi, une solution particulière est $y(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$. (On peut, et c'est un bon réflexe, vérifier directement en remplaçant que c'est effectivement une solution).

La solution générale de l'équation inhomogène est alors la somme s'un solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Ici, on obtient $y(x) = 1 + A/\sqrt{1+x^2}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

Encore une remarque sur les constantes d'intégration : ici, on aurait pu dire que $c(x) = \sqrt{1+x^2} + k$, *avec* $k \in \mathbf{R}$, *vu qu'il y a plusieurs primitives. Comme on avait posé au départ* $y(x) = c(x)/\sqrt{1+x^2}$, *en multipliant on trouve bien* $y(x) = (\sqrt{1+x^2}+k)/\sqrt{1+x^2} = 1 + k/\sqrt{1+x^2}$ *comme ci-dessus.*

Enfin, sur la méthode de variation de la constante. Dans certains cas simples, on peut chercher une solution particulière sous une forme proche de celle du second membre. Ici, comme le second membre était un polynôme de degré 1 *en* x, *on pouvait s'attendre à trouver une solution particulière poynômiale de degré* 1. *En fait, on pouvait même deviner que la fonction constante était solution. Deviner ainsi les solutions particulières peut être une bonne idée (c'était le cas ici), mais il ne faut pas perdre de vue que la méthode de variation de la constante reste la plus générale.*

Exercice 3

Cet exercice est essentiellement le même que le précédent : je serai donc assez bref.

1. On met cette équation sous la forme $y' = -\frac{4x^3}{x^4-1}y$ (on peut, car le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle considéré). Il s'agit donc d'intégrer $\frac{4x^3}{x^4-1}y$, qui est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = (x^4 - 1)$ et admet donc $-\ln(-u(x)) = -\ln(1 - x^4)$ pour primitive sur $]-1, 1[$ (car $u(x)$ y est toujours négatif). La solution générale est donc $y(x) = Ae^{-\ln(1-x^4)} = \frac{A}{1-x^4}$ avec $A \in \mathbf{R}$. (Le vérifier directement est un bon réflexe.)

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = c(x)/(1 - x^4)$. On calcule d'abord $y'(x) = \frac{c'(x)(1-x^4)-4x^3c(x)}{(1-x^4)^2}$, puis on remplace dans l'équation :

$$(1 - x^4)\frac{c'(x)(1 - x^4) - 4x^3c(x)}{(1 - x^4)^2} + \frac{4x^3c(x)}{1 - x^4} = x \quad ,$$

et après simplification on obtient $c'(x) = x$, dont on déduit $c(x) = x^2/2$. Ainsi, un solution particulière est $y(x) = \frac{x^2}{2(1-x^4)}$ et la solution générale est $y(x) = \frac{x^2}{2(1-x^4)} + \frac{A}{1-x^4}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

Exercice 4

Cet exercice est encore essentiellement le même que le 2, sauf pour la dernière question. Je passe donc rapidement sur les trois premières.

1. Cette fonction est définie sur $]-1, 1[$, elle est dérivable sur cet intervalle, et sa dérivée est donnée par $x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$.

2. Cette équation est équivalente à $z' = \frac{2}{1-x^2}z$ (ou peut diviser car sur $]-1, 1[$, le dénominateur ne s'annulle pas). Sa solution générale sur cet intervalle est donc $z(x) = Ae^{\ln((1+x)/(1-x))} = A\frac{1+x}{1-x}$, avec $A \in \mathbf{R}$.

3. On cherche les solutions sous la forme $y(x) = c(x)z(x) = c(x)\frac{1+x}{1-x}$. On commence par calculer $y'(x) = c'(x)\frac{1+x}{1-x} + \frac{2c(x)}{(1-x)^2}$. On remplace alors dans l'équation de départ, et après simplfication (en vérifiant qu'on ne simplifie jamais par zéro, d'ailleurs), on trouve $c'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On reconnaît la dérivée de arctan (vous la reconnaissez, hein ?) et on en déduit que la solution générale est $y(x) = \frac{1+x}{1-x}\big(\arctan(x) + A\big)$, avec $A \in \mathbf{R}$.

4. Cette question n'a en quelque sorte rien à voir avec les équations différentielles : il s'agit d'une question de prolongement par continuité comme nous en avions déjà traité auparavant. Pour pouvoir prolonger y par continuité en 1, il faut et il suffit que $y(x)$ admette une limite finie quand x tend vers 1. Comme on a un dénominateur qui tend vers 0, notre seule chance est que le numérateur tende aussi vers 0. Pour celà, il faut que $A = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (valeur que vous connaissez tous, aussi).

Donc, pour que y soit prolongeable, il faut que $A = \frac{\pi}{4}$. Mais celà suffit-il ? Pour le vérifier on utilise un DL à l'ordre 1 de $\arctan(x)$ au voisinage de 1, obtenu par exemple par la formule de TAYLOR : $\arctan(1) = \pi/4 + \frac{1}{2}(x - 1) + (x - 1)\varepsilon(x - 1)$. On voit alors que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2} \ .$$

On en déduit que, pour $A = \frac{\pi}{4}$, f est effectivement prolongeable par continuité en 1, en posant $y(1) = 1$ (car $\lim_{x \to 1}(1 + x) = 2$).

Cette dernière question fournit une illustration de deux aspects des équations différentielles. Le premier est le notion de conditions aux limites, ou conditions initiales, très utile en physique : une fois trouvé la solution générale, qui fait intervenir une constante non déterminée, on impose une condition du type $y(0) = c$ *ou que* y *admet une limite finie en un certain point pour déterminer la constante.*

Le deuxième aspect est celui que j'avais déjà évoqué plus haut : le domaine de définition des solutions joue un rôle important. Ici, on a trouvé une solution sur $]-1, 1[$*, et vu qu'elle se prolongeait en* 1 *par continuité (sans étudier le dérivabilité de la fonction obtenue). On pourrait continuer en cherchant des solutions sur* $]1, +\infty[$*, et voir s'il existe une valeur de la constante d'intégration qui permette de la prolonger en* 1*. On pourrait alors regarder si ces deux solutions partielles se recollent en une fonction dérivable en* 1 *ou pas.*