Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 8 : équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $2y' + 3y = 0$
2. $y' + (x+1)y = 0$
3. $y'e^{-x^2} - 2xy = 0$
4. $(x^2+1)y' - (x^4+2x^2)y = y$

Exercice 2. (Examen, septembre 2006)

1. Calculer la dérivée de $\phi(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
2. Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^2+1)y' + xy = 0$.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^2+1)y' + xy = x$.

Exercice 3. (Examen, juin 2006)

1. Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^4-1)y' + 4x^3y = 0$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. Trouver les solutions de l'équation différentielle $(x^4-1)y' + 4x^3y = x$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 4. (Examen, septembre 2005)

1. Trouver le domaine de définition et calculer la dérivée de le fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
2. Trouver une fonction non nulle z définie sur l'intervalle $]-1,1[$ solution de l'équation différentielle $(1-x^2)z' = 2z$.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2y = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.
4. Pour quelle valeur de la constante la solution trouvée est-elle prolongeable en 1 ?

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 5y' + 4y = 0$
2. $y'' + 4y' - 2y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$
4. $4y'' + 4y' + 5y = 0$

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y' + y = x^2$
2. $y'' - 4y' + 4y = (1+x)e^{3x}$
3. $y'' + 4y = \sin(2x)$
4. $y'' + 2y' + y = xe^x\cos(x)$

Exercice 7. (Examen, juin 2005)

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$2x^4y'' + (3x^2+4x^3)y' + y = 0 \tag{E}$$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1. Montrer que si y est une solution de (E), alors la fonction z donnée par $z(x) = y(\frac{1}{x})$ est solution de l'équation $2z'' - 3z' + z = 0$.
2. En déduire la solution générale de (E).