Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 7 : étude globale, 2

Exercice 1. Déterminer (sans calculatrice !) une valeur approché à 10^{-5} près des nombres $\sqrt{4{,}0008}$, $\sqrt[3]{27{,}0054}$, $\ln(1{,}003)$.

Exercice 2.

1. Montrer que l'équation $2x\sqrt{x^2+1} = x+1$ admet solution dans $[0,1]$.
2. Soit l'équation $2\cos(x) = x$.
   (a) Montrer que les solutions, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.
   (b) Montrer l'existence d'au moins une solution.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe dans $[a,b]$ c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$. (*Indication* : on pourra considérer $g\colon x \mapsto f(x) - x$.)

Exercice 4. Soit f définie par $f(x) = (x^2+1)\sin x$ pour $x \in \mathbf{R}$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0,\pi]$.

Exercice 5. Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer, que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 6. Montrer que la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. (*Indication* : on pourra comparer $\frac{1}{k}$ et $\ln(k) - \ln(k-1)$.)

Exercice 7.

1. Pour tout $x > 0$, montrer que
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}\ .$$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 8. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 9. On pose $P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}$.

1. Montrer que, pour tout $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,
$$P(x) \leq \sin(x) \leq P(x) + \frac{x^9}{9!}.$$
2. Trouver un nombre $a > 0$ tel que l'on ait $|\sin(x) - P(x)| \leq 10^{-5}$ pour tout $x \in [0, a]$.

Exercice 10. Monter les inégalités suivantes.

1. $\frac{2}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. $\frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant 1$ pour $x \geqslant 0$.
3. $x \leqslant \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} \leqslant y$ pour $0 < x < y$.