Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 6 : étude globale, 1

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\colon I \to \mathbf{R}$ continue telle que pour tout x appartenant à I, on a $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est soit la fonction constante égale à $+1$, soit la fonction constante égale à -1.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f\colon x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+x^2} \ .$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$ et déterminer $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x)$.

Exercice 3. Soit $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in\ ]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in\ ]a,b]$. [Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.]
2. Posons
$$p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$
et considérons la fonction h définie pour $x \in [a,b]$ par $h(x) = f(x) - p \cdot g(x)$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{\substack{x\to b\\ <}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell \ .$$
4. Application : calculer la limite suivante.
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Exercice 4. Soit P un polynôme de degré n qui possède n racines distinctes dans $\mathbf{R}$. Montrer que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On considère la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \ .$$

Vérifier qu'on peut appliquer le théorème de Rolle à ϕ et en déduire le théorème des accroissements finis.

Exercice 6. Montrer les assertions suivantes.

1. On a l'inégalité
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \ .$$
2. Pour tout réel $x \geq 0$, on a
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x \ .$$
3. Pour tous réels x et y, on a
$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y| \ .$$