Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 4 : développements limités, application

1 Limites

Exercice 1. En utilisant des développement limités, calculer la limite en 0, si elle existe, de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
2. $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)}$
3. $x \mapsto \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}$
4. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^3}$
5. $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
6. $x \mapsto \frac{(1+x)^{1/x}-x}{x}$

Exercice 2. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ des deux expressions suivantes.

1. $x\sin(\frac{1}{x})$
2. $x^2e^{1/x} - x - x^2$

Exercice 3. Trouver les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ aux courbes de chacune des fonctions suivantes, en précisant la position relative pour les grandes valeurs de x.

1. $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $\frac{2x^2}{x-1}e^{\frac{1}{2x}}$
3. $x^2\sin(\frac{1}{x})$
4. $x\frac{e^x-e^-x}{e^x+e^-x}$

Exercice 4.
1. Déterminer pour quelle valeur de a l'expression $\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x}$ admet une limite finie quand x tend vers 0.
2. Déterminer pour quelles valeurs de b et c l'expression $\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}$ admet une limite finie quand x tend vers 0.

Exercice 5. Calculer la limite quand x tend vers 0 par la droite (c'est-à-dire par valeurs positives) de chacune des expressions suivantes.

1. $f_1 \colon x \mapsto \frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-\tan(x)}$
2. $f_2 \colon x \mapsto \frac{x^{x^x}\log(x)}{x^x-1}$
3. $f_3 \colon x \mapsto \frac{(1+x)^{\frac{\log(x)}{x}}}{x(x^x-1)}$
4. $f_4 \colon x \mapsto (\cos(x))^{\cot(x^2)}$

2 Tangentes et asymptotes

Exercice 6. Dans les deux cas suivants, donner l'équation de la tangente en a à la courbe réprésentative de la fonction donnée, et dire si le point d'abscisse a est un point d'inflexion.

1. $x \mapsto \ln(x)$, $a = 1$
2. $x \mapsto \exp(x) - \frac{x^2}{2}$, $a = 0$

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \sin(x) - x\cos(x)\ .$$

On note Γ sa courbe représentative.

1. Calculer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
2. Étudier la position relative de T et Γ au voisinage de ce point.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \tan^5(x) + 5\tan(x)\ .$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Déterminer l'image J de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par f.
3. Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur J.
4. Soit $g\ : J \to I$ la réciproque de f. Calculer la dérivée de g en 0.
5. Écrire le développement limité à l'ordre 3 de g en 0.
6. On note Γ la courbe représentative de g. Donner une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Étudier la position de cette tangente par rapport à Γ au voisinage de 0.

3 Calculs divers

Exercice 9. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes.

1. $f_1 \colon x \mapsto \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)^{1/2}$
2. $f_2 \colon x \mapsto \log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$
3. $f_3 \colon x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$
4. $f_4 \colon x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
5. $f_5 \colon x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ (astuce : calculer f_5')

(On rappelle la définition de $\mathrm{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ et son développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 : $\mathrm{sh}(x) = x + x^3/6 + x^5/120 + \ldots + x^{2n+1}/(2n+1)! + x^{2n+1}\varepsilon(x)$.)

Exercice 10. Ailleurs qu'en 0. Calculer le développement limité des fonctions suivantes à l'ordre et au voisinage du point indiqués.

1. $f_1 \colon x \mapsto x^{\frac{1}{-1+\log(x)}}$ à l'ordre 4, en $a = 1$.
2. $f_2 \colon x \mapsto (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/2}$ à l'ordre 4, en $a = +\infty$.
3. $f_3 \colon x \mapsto \log(2\sin(x))$ à l'ordre 3, en $a = \pi/6$.

Exercice 11. (difficile) Calculer la limite quand x tend vers 0 de

$$\frac{\sin(\mathrm{sh}(x)) - \mathrm{sh}(\sin(x))}{\tan(\mathrm{th}(x)) - \mathrm{th}(\tan(x))}\ .$$

On pourra utiliser des symétries complexes, comme $\sin(ix) = i\,\mathrm{sh}(x)$ pour s'épargner des calculs inutiles. On pourra même expliquer ainsi pourquoi les développements limités du numérateur et du dénominateur ne comportent que des termes d'ordre congru à 3 modulo 4, et en déduire encore quelques simplifications (ainsi que l'ordre auquel il convient de développer).

4 Vers la continuité

Exercice 12. Ordre du développement et ordre de dérivabilité.

1. Montrer qu'une fonction est continue en un point x_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0.
2. Montrer qu'une fonction est dérivable en un point x_0 si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1.
3. Peut-on dire qu'un fonction est deux fois dérivable en x_0 si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 2 ? Indication : méditer le cas de $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et 0 sinon.

Exercice 13. On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$.

1. Expliquer pourquoi f est continue et dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, et calculer sa dérivée sur cet ensemble.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer la valeur de sa dérivée en ce point.
3. f est donc dérivable sur $\mathbf{R}$. Sa dérivée est-elle continue ?

Exercice 14. Quel est l'ensemble de continuité des fonctions suivantes ?

1. $x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sqrt{x}\ln(-x) & \text{sinon} \end{cases}$
2. $x \mapsto \begin{cases} \cos(x)/x & \text{si } x > \pi/2 \\ |x|/x & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$