Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 2 : calculs de dérives

Exercice 1. Fonctions usuelles et leurx combinaisons linéaires

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1\colon x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + x + \sqrt{x} + 5$
2. $f_2\colon x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
3. $f_3\colon x \mapsto 2\sin(x) + 4\sin^2(x) - 3\cos(x) + 4\cos^2(x)$
4. $f_4\colon x \mapsto 3e^x + 5\ln(x)$
5. $f_5\colon x \mapsto \frac{x^2+x-2}{x-1} - \frac{1+x\ln(x)}{x}$
6. $f_6\colon x \mapsto \ln(x^3) + \ln(\frac{x+1}{x-1}) - e^{3x-1-\ln(x^2)}$

Exercice 2. Produits et quotients

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1\colon x \mapsto x\ln(x) - x$
2. $f_2\colon x \mapsto (x^2-1)e^x$
3. $f_3\colon x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$
4. $f_4\colon x \mapsto \tan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
5. $f_5\colon x \mapsto \frac{\sin(x)+\cos(x)}{e^x}$
6. $f_6\colon x \mapsto \frac{xe^x - \sqrt{x}\ln(x)}{1-x^2}$

Exercice 3. Fonctions composées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f_1\colon x \mapsto \ln(3x^3 - x - \frac{3}{x})$
2. $f_2\colon x \mapsto 3\sin(x^2-1) + 4\cos(1+\ln(x))$
3. $f_3\colon x \mapsto e^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot e^{\frac{2-x}{1+x}}$
4. $f_4\colon x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
5. $f_5\colon x \mapsto (e^{3x^2-2x+1})^2$
6. $f_6\colon x \mapsto \sin^2(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2})$

Exercice 4. Fonctions réciproques : la théorie

1. Rappeler les définitions d'une bijection et de sa bijection réciproque.
2. Soient f et g deux fonctions dérivables, et composables entre elles, telles que $f \circ g = \mathbf{Id}$ (où $\mathbf{Id}$ est la fonction telles que $\mathbf{Id}(x) = x$ pour tout x). En dérivant l'égalité précédente, exprimer la dérivée de g en fonction de celle de f.

Exercice 5. Fonctions réciproques : la pratique

1. On peut définir la fonction ln comme la primitive de $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. À partir de cette définition, montrer que ln est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbf{R}$. On définit alors l'exponentielle comme sa fonction réciproque. Montrer à partir de cette définition que la fonction exponentielle est sa propre dérivée.
2. Montrer que sin est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. On note arcsin sa réciproque. Montrer que arcsin est croissante, puis calculer sa dérivée.
3. Déterminer un intervalle I de $\mathbf{R}$ tel que cos soit une bijection de I sur $[-1; 1]$. On note arccos sa réciproque. Déterminer le sens de variation de arccos puis calculer sa dérivée.
4. Trouver deux intervalles J et K de $\mathbf{R}$ tels que tan soit une bijection de J sur K. Calculer la dérivée de sa réciproque, notée arctan.

Exercice 6. Dérivées successives et formule de Taylor.

1. Calculer la suite des dérivées de sin et de cos. À l'aide de la formule de Taylor, en déduire un développement limité de sin et de cos à l'ordre n en 0.
2. Calculer la suite des des dérivées de $x \mapsto e^x$. En déduire un développement limité à l'ordre n de l'exponentielle au voisinage de 0.
3. On considère les fonctions sinh et cosh définies respectivement par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

   Montrer que la dérivée de sinh est cosh et réciproquement. En déduire un développement limité de sinh et de cosh à l'ordre n en 0.
4. Établir par la formule de Taylor un développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction arcsin introduite à l'exercice précédent.