Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Feuille 10 : révisions

1 Généralités sur les fonctions

Exercice 1. Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes en justifiant, par exemple, par une petite démonstration, un résultat de cours ou un contre-exemple.

1. Les fonctions f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x^2}$ sont égales.
2. Une fonction injective est toujours strictement croissante ou strictement décroissante.
3. Il existe une fonction bijective de $\mathbf{R}_+^* =]0; +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
4. Il existe une fonction bijective de $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbf{R}$. Il en existe une de $]-1; +1[$ dans $\mathbf{R}$.
5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\arccos(\cos(x)) = x$.
6. Pour tout $x \in [-1; +1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$.
7. Soit f une fonction croissante admettant une réciproque. Alors, f^{-1} est croissante.
8. Pour tout $x \in [0; \pi]$, on a $\arccos\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)}\right) = x$.
9. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
10. Soit f une fonction paire. Alors, on a $f(0) = 0$.

2 Étude locale

Exercice 2. Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes en justifiant, par exemple, par une petite démonstration, un résultat de cours ou un contre-exemple.

1. Soit f une fonction paire et dérivable. Alors, on a $f'(0) = 0$.
2. La dérivée d'une fonction impaire est impaire.
3. Il existe une fonction dérivable égale à sa dérivée.
4. Il existe une fonction dérivable f telle que f' ne soit pas continue.
5. Soit $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et $c \in [a; b]$ un extremum de f. Alors, on a $f'(c) = 0$.
6. Il existe une fonction dérivable croissante dont la dérivée est la fonction g définie par $g(x) = (x^3 - 2x + 4)\ln(2 + \cos(x))$.

7. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ si $x \in [0, +\infty[$ et $f(x) = x\ln(-x)$ si $x \in]-\infty, 0[$ est une composée de fonction usuelles sur $\mathbf{R}_+$, est est donc continue sur cet intervalle.
8. Soit f une fonction bijective et dérivable. Alors f^{-1} est dérivable.

Exercice 3. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbf{R}$? Si oui, y sont-elles dérivables ?

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} x^2(\ln(x) - e^x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g\colon x \mapsto \begin{cases} x(\ln(x) - xe^x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Peut-on prolonger par continuité en les fonctions suivantes ? Si oui, ce prolongement est-il dérivable partout ?

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0$$
$$f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0$$
$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \text{ si } x \neq 1$$

Exercice 5. Calculer le développement limité des fonctions suivantes au point et à l'ordre indiqués.

1. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\cos(x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0
2. $x \mapsto (x^2 - 2x)e^{2x\ln(\cos(x))}$ à l'ordre 7 au voisinage de 0
3. $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x^3-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0
4. $x \mapsto (x^2 - 2x)e^{\sqrt{x}-1}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1
5. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 2

Exercice 6. Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin^3(x)} \qquad \lim_{x\to\pi/2} \frac{x\cos x}{2x-\pi}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+2x} \qquad \lim_{x\to\pi/2} \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\ln(\sin(x))}$$

Exercice 7. Donner l'équation de la tangente en a à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes. Préciser ensuite la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de a, et dire si a est un point d'inflexion.

1. $x \mapsto \cos(x)(1 + \ln(1+x)$ en $a = 0$
2. $x \mapsto x^2e^x$ en $a = 1$

Exercice 8. Trouver les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ aux courbes des fonctions suivantes, puis préciser leur position relative pour les grandes valeurs de x.

$$f(x) = x\ln(\frac{x+1}{x-1}) \qquad g(x) = \frac{2x^2}{x-1}e^{\frac{1}{2x}}$$

3 Étude globale

Exercice 9. Montrer qu'un polynôme de degré 3 a toujours au moins une racine réelle.

Exercice 10. Montrer les inégalités suivantes.

1. $0 \leqslant \cos(1) \leqslant 1 - \frac{\pi}{2}$
2. $1 - \frac{\pi}{2} \leqslant \sin(1) \leqslant 1$
3. $\sqrt{y} \leqslant \frac{1}{2}(y-1)$ pour $y \geqslant 1$

Exercice 11. En appliquant une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, on a $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \tan^5(x) + 5\tan(x) \ .$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Déterminer l'image J de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par f.
3. Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur J.
4. Soit $g\ : J \to I$ la réciproque de f. Calculer la dérivée de g en 0.
5. Écrire le développement limité à l'ordre 3 de g en 0.
6. On note Γ la courbe représentative de g. Donner une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Étudier la position de cette tangente par rapport à Γ au voisinage de 0.

4 Équations différentielles

Exercice 13.

1. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1-x^2)$.
2. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $(x^2-1)y' + xy = 0$.
3. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $(x^2-1)y' + xy = 1$.

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I.

1. $y'\ln(x) + \frac{y}{x} = 1$ sur $I =]0, +\infty[$
2. $y' = e^{-x} - y$ sur $I = \mathbf{R}$
3. $y' = \cos^2(x) - y\tan(x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 15. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes.

$$y'' = 4y' - 4 \qquad\qquad y'' + y' - y = 0$$
$$y'' = 2y' - 2 \qquad\qquad y'' + y' + y = x^2$$

5 Fonctions de deux variables

Exercice 16. On considère le fonction f définie par $f((x,y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$.

1. Donner le domaine de définition de f, puis le représenter graphiquement dans le plan.
2. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $a = (1,2,3)$. Indiquer un vercteur normal à ce plan.

Exercice 17. Déterminer et représenter dans le plan les lignes de niveau 0, 1 et 2 des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} \qquad g(x,y) = xy \qquad h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Exercice 18. Soit g la fonction de deux variables définie par $g(x,y) = y^3 - x^3 + 5y - 5x$.

1. Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = g(x,y)$ au-dessus du point de coordonnées $(1,1)$.
2. On pose $\phi(x) = x^3 + 5x$. Montrer que ϕ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. On note ψ sa réciproque.
3. On fixe une constante $c \in \mathbf{R}$. À l'aide des fonctions ϕ et ψ, déterminer une fonction θ définie sur $\mathbf{R}$ telle que la ligne de niveau $g(x,y) = c$ soit la courbe $y = \theta(x)$.
4. On considère la fonction G définie par

$$G(x,y) = \begin{cases} y^3 - x^3 + 5y - 5x & \text{si } y \leqslant x \\ -8x + 8y & \text{si } y > x \end{cases}$$

Monter qu'elle admet des dérivées partielles au point $(1,1)$.