Université Pierre et Marie Curie — LM110

A.R. — Année universitaire 2007-2008

CORRIGÉ DU DEVOIR 3

Question de cours : formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 de sinus en 0 : sinus est une fonction définie, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$; soit donc, $a \in [0, \pi]$, x fixé dans $[0, a]$, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ qui dépend de x tel que

$$\sin(x) = \sin(0) + x\cos(0) - \frac{x^2}{2}\sin(0) - \frac{x^3}{6}\cos(0) + \frac{x^4}{24}\sin(\theta x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(\theta x).$$

Puisque $a \geq 0$ est plus petit que π, $0 \leq \theta x \leq \pi$. Sur cet intervalle, $\sin(\theta x)$ est positif. On obtient donc $\frac{x^4}{24}\sin(\theta x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$.
Cette identité est vraie pour $x = a$. Ainsi $\sin(a) \geq a - \frac{a^3}{6}$.

Exercice I

I-1) Pour $x < 0$ et $x > 0$ la fonction f est continue par application des théorèmes généraux. La première expression sur $] - \infty, 0[$ est un polynôme donc une fonction indéfiniment dérivable. La seconde expression sur $]0, +\infty, [$ est la composée de l'exponentielle et d'un polynôme, puis une translation de -2. C'est donc une fonction indéfiniment dérivable aussi.
En zéro, une étude particulière est nécessaire. Par définition, on a $f(0) = 0$. On voit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x = 0$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\exp(x^3 + x) - 2 = 0$.
Ces trois quantités sont égales, f est continue en 0.

I-2) La dérivabilité en dehors de 0 est acquise. On l'étudie en 0.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \frac{\frac{x^3}{3}+x^2+2x-0}{x} = 2$, d'où une demi-tangente à gauche.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{2\exp(x^3+x)-2-0}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \left[\frac{(2(1+x+x\epsilon(x)-2)}{x}\right] = 2$, d'où une demi-tangente à droite.
On a l'égalité des deux limites, f est dérivable en 0.

I-3) Le développement limité d'un polynôme en 0 est immédiat en utilisant l'unicité (si on en trouve un c'est le bon). $\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x = 2x + x^2 + x^2\left(\frac{x}{3}\right)$. La fonction $x \mapsto \frac{x}{3}$ tend vers 0 quand $x \to 0$. On a donc le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 pour $x < 0$:

$$f(x) = 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

I-4) Pour le développement limité à l'ordre 2 lorsque x est strictement positif, une possibilité est de dériver deux fois l'expression de la fonction $g(x) = 2e^{x^3+x} - 2$. On obtient ainsi (on retrouve $g'(x) = 2$) : $g'(x) = 2(3x^2 + 1)e^{x^3+x}$ et

$$g''(x) = 2(3x^2 + 1)^2 e^{x^3+x} + 12xe^{x^3+x} = (18x^4 + 12x^2 + 12x + 2)e^{x^3+x}.$$

D'où le coefficient pour le terme en x^2 : $\frac{g''(0)}{2} = 1$.
On peut aussi calculer le développement limité de façon classique à partir du développement limité de l'exponentielle : (c'est plus simple, le terme en x^3 n'intervient pas dans un développement à l'ordre 2)

$$\exp(x^3 + x) - 2 = 2 - 2 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

On a donc le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 pour $x > 0$:

$$f(x) = 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

I-5) Le développement à droite et le développement à gauche en 0 à l'ordre 2 sont les mêmes, on en déduit le résultat demandé.

Exercice II

II-1) f est définie si le logarithme est défini. $(x+1)^2 + (y+2)^2$ est la somme de deux carrés strictement positifs, c'est toujours strictement positif. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$.

II-2) On calcule la dérivée partielle par rapport à x au point (a, b) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+(y+2)^2}\Big|_{(a,b)} = \frac{2(a+1)}{(a+1)^2+(b+2)^2}$$

Et la dérivée par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{2(y+2)}{(x+1)^2+(y+2)^2}\Big|_{(a,b)} = \frac{2(b+2)}{(a+1)^2+(b+2)^2}$$

II-3) Le plan tangent au point $(0, 0, \ln(5))$ est le plan qui passe par ce point et qui a pour vecteur normal $\left|\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ -1 \end{array}\right.$. Son équation est donc : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) - (z - \ln(5)) = 0$.

Ici $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{2}{5}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{4}{5}$. On obtient donc :

$$5z = 2x + 4y + 5\ln(5).$$

Exercice III

III-1) $f(x) = \ln(x)e^{\frac{1}{x}}$ est une fonction définie, continue et dérivable sur $]0, \infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, composée et produit de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle. Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{\ln(x)e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{x-\ln(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.
$x - \ln(x)$ a pour dérivée $1 - \frac{1}{x}$. Elle décroît pour x variant de 0 à 1 puis croît lorsque x varie de 1 à l'infini. En 1 elle passe par un minimum, elle vaut 1. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - \ln(x) > 0$. D'où $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.

III-2) Puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $]0, \infty[$ est un intervalle.
Puisque f est une fonction croissante, $J = f <]0, \infty[>=]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x)[$. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{x}\right) = +\infty$,

$$J =]-\infty, = \infty[= \mathbb{R}.$$

III-3) D'après la première partie du théorème des fonctions réciproques énoncé en cours, f continue, strictement croissante est une injection de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. Par construction, c'est alors une bijection de $]0, \infty[$ sur J.

III-4) D'après la seconde partie du théorème des fonctions réciproques énoncé en cours, g est dérivable en 0 si la dérivée de f en $g(0) = 1$ ne s'annule pas. On a $f'(1) = e \neq 0$.

$$\text{Alors } g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e}.$$

III-5) Voilà deux solutions de cette question cassée en III-5 et III-5 bis. L'une consiste à répondre en calculant la dérivée de $f''(0)$, l'autre demande d'abord de déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f, puis de se servir de ce développement pour trouver celui de g. la première méthode demande plus de connaissances sur la continuité, la seconde est plus conforme à l'esprit "cours de calcul" du LM110.

Première version :
III-5) Question : calculer $f''(0)$.
On dérive f', $f''(x) = -\frac{x-\ln(x)}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - 2\frac{x-\ln(x)}{x^3}e^{\frac{1}{x}} = \frac{(2x+1)\ln(x)-x^2-2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. Donc $f''(1) = -3e$.
III-5 bis) Question : calculer le développement limité de g à l'ordre 2 :
Le développement de g à l'ordre 2 est, compte tenu des propriétés de f au voisinage de $g(0) = 1$, le développement de Taylor-Young de g. On a $g'(0) = 1$ et on cherche $g''(0)$. Comme $f'(1)$ n'est pas nulle et que f' est continue au voisinage de 1, il existe un voisinage de 1 sur lequel f' est non nulle. g est continue en 0, il existe donc un voisinage de 0 tel que $f'(g(x))$ ne s'annule pas. Ainsi dans ce voisinage de 0, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.
Puisque f' et g sont dérivables, g' l'est aussi.

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{[f'(g(x))]^2}.$$

On calcule la valeur en 0 : $g''(0) = -\frac{f''(g(0))g'(0)}{[f'(g(0))]^2} = -\frac{f''(1)g'(0)}{[f'(1)]^2}$.
On en déduit $g''(0) = -\frac{3}{e}$.
D'où le développement limité de g à l'ordre 2 en 0 :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 + \frac{x}{e} - -\frac{3}{2e}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Seconde version :
III-5) Question : donner le développement limité de f en 1 à l'ordre 2
On pose $x = 1 + h$, on développe en h au voisinage de 0. $\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$.
Le premier terme est en h, il suffit de développer l'exponentielle au premier ordre pour avoir le développement de f au second.
$e^{\frac{1}{1+h}} = e^{1-h+h\varepsilon(h)} = e\, e^{-h+h\varepsilon(h)} = e(1 - h + h\varepsilon(h)) = e(1 - h) + h\varepsilon(h)$. On en déduit :

$$f(1 + h) = e(h - \frac{h^2}{2} - h^2) + h^2\varepsilon(h) = e(h - \frac{3h^2}{2}) + h^2\varepsilon(h).$$

III-5 bis) Question : calculer le développement limité de g à l'ordre 2 :
Pour obtenir le développement limité de g en 0 à l'ordre 2 , on écrit

$$g(x) = 1 + \frac{1}{e}x + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$$

où b est un réel inconnu et on substitue dans le développement de f en 1.
On remplace h par $\frac{1}{e}x + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$ et on calcule

$$f(g(x)) = f(1 + \tfrac{1}{e}x + bx^2 + x^2\varepsilon(x)) = e(\tfrac{1}{e}x + bx^2 + x^2\varepsilon(x) - \frac{3(\frac{1}{e}x+bx^2+x^2\varepsilon(x))^2}{2})$$
$$+ (\tfrac{1}{e}x + bx^2 + x^2\varepsilon(x))^2\varepsilon(\tfrac{1}{e}x + bx^2 + x^2\varepsilon(x)).$$

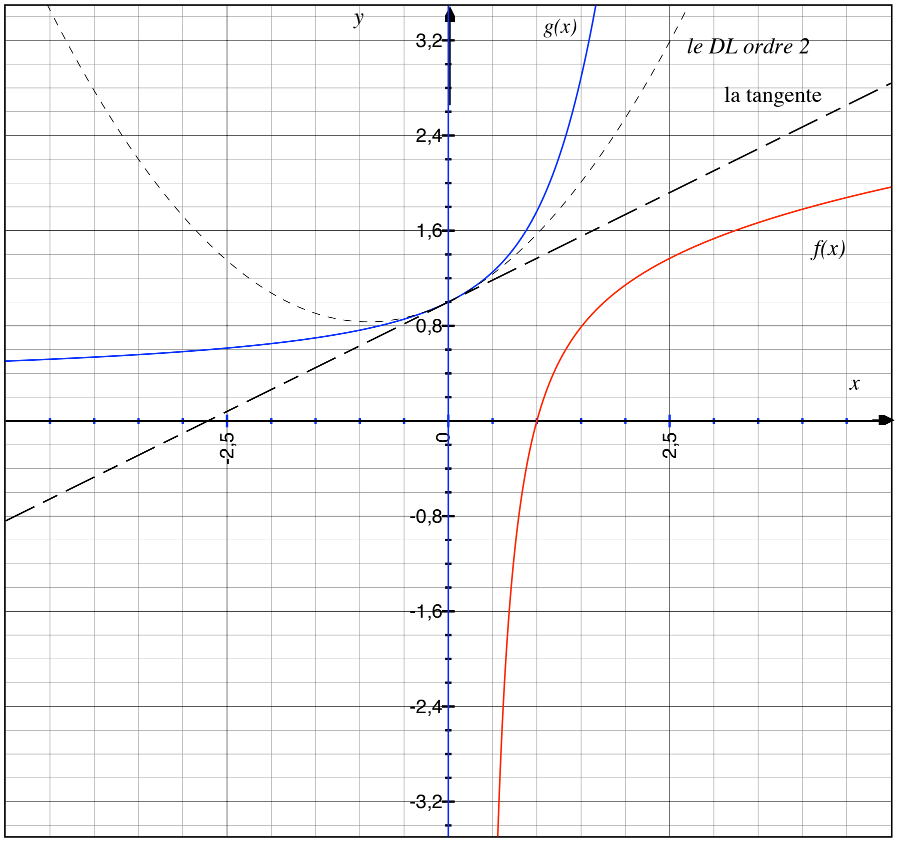
On obtient $f(g(x)) = e(\frac{1}{e}x + bx^2 - \frac{3x^2}{2e^2}) + x^2\varepsilon(x) = x + bex^2 - \frac{3x^2}{2e}) + x^2\varepsilon(x)$.
Donc, si $f \circ g(x) = x$, $bex^2 - \frac{3x^2}{2e} = 0$, $b = \frac{3}{2e^2}$. Finalement :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{e}x + \frac{3}{2e^2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

III-6) On en déduit immédiatement l'équation de la tangente de g en (0, 1) :

$$y = 1 + \frac{1}{e}x.$$

Pour un x donné assez proche de 0, l'ordonnée du point de la tangente est plus petite que $g(x)$ puisque $g''(0) > 0$. On en déduit que le graphe est au-dessus de la tangente.



Exercice IV

IV-1) On pose donc $z(x) = y(\frac{1}{x^2})$, comme y est deux fois dérivable et $x > 0$, la fonction z est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et deux fois dérivable.

$$z'(x) = -\frac{2y'(\frac{1}{x^2})}{x^3} \text{ et } z''(x) = \frac{4y''(\frac{1}{x^2})}{x^6} + \frac{6y'(\frac{1}{x^2})}{x^4}.$$

IV-2) On a donc

$$\frac{16y''(\frac{1}{x^2})}{x^6} + \frac{24y'(\frac{1}{x^2})}{x^4} = 4z''(x).$$

Posons $t = \frac{1}{x^2}$, cela s'écrit :

$$4z''(x) = 16t^3y''(t) + 24t^2y'(t).$$

Que l'on peut réécrire différemment pour être plus clair $4\frac{d^2z}{dx^2}(x) = 16t^3\frac{d^2y}{dt^2}(t)+24t^2\frac{dy}{dt}(t)$.
De la même façon $-3z'(x) = 6t\sqrt{y}\, y'(t)$.
L'équation différentielle (E) qui s'écrit, si y est une fonction de la variable t :

$$16t^3y'' + (24t^2 + 6t\sqrt{t})y' - y = 0$$

$$\text{devient } 4z'' - 3z' - z = 0,$$

ce qui est bien l'équation (E') annoncée.

IV-2) On cherche la solution de l'équation (E') sous la forme $e^{rx}, r \in \mathbb{C}$. On obtient r comme solution de l'équation $4r^2 - 3r - 1 = 0$ de solution évidente 1. La seconde racine du polynôme est $-\frac{1}{4}$.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E') est $\{\alpha e^x+\beta e^{\frac{-x}{4}}, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
De $z(x) = y(\frac{1}{x^2})$, on déduit $y(t) = z(\frac{1}{\sqrt{t}})$ d'où les solutions de (E) :

$$y(t) = \alpha e^{\frac{1}{\sqrt{t}}} + \beta e^{\frac{-1}{4\sqrt{t}}}, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$