Devoir 3

Université Pierre et Marie Curie
Unité LM110 *Session de juin 2007*

Examen Durée 2 heures
L'usage des calculatrices est interdit.
Merci d'éteindre téléphones portables et baladeurs.

Question de cours. Soit $a \in [0, \pi]$. En écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ (dont le reste fait intervenir une valeur de la dérivée quatrième $\sin^{(4)}(x) = \sin(x)$) sur l'intervalle $[0, a]$, montrer que pour tout $a \in [0, \pi]$, $a - \frac{a^3}{6} \leq \sin(a)$.

Exercice I. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x & si \quad x < 0 \\ 2\exp(x^3 + x) - 2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.
2. Montrer que la fonction f est dérivable en 0.
3. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 à gauche en 0.
4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 à droite en 0.
5. En déduire que la fonction f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

Exercice II.
Soit $f : (x, y) \mapsto \ln\left((x + 1)^2 + (y + 2)^2\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Soit (a, b) un point du domaine de définition de f. Calculer les dérivées partielles de f au point (a, b).
3. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point A de coordonées $(0, 0, \ln(5))$.

Exercice III.
On considère la fonction réelle f définie par $f(x) = \ln(x)e^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'image J de l'intervalle $]0, +\infty[$ par f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur J.
4. Soit $g : J \mapsto]0, +\infty[$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en ce point.
5. Ecrire le développement limité de g a l'ordre 2 en 0.
6. Donner l'équation de la tangente au graphe Γ de g au point d'abscisse 0. Préciser la position de cette tangente par rapport a Γ.

LM110 Mime 12

UPMC

Devoir 3

A.R. **Novembre 2007**

Exercice IV.
Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on considère l'équation diffŕentielle

$$(E) \qquad 16x^3y'' + \left(24x^2 + 6x\sqrt{x}\right) y' - y = 0\ .$$

1. On considère la fonction $z : x \mapsto y\left(\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $]0, +\infty[$ et où y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer pour tout x dans $]0, +\infty[$, z' et z'' en fonction de y' et y''.
2. En déduire que si y est solution de (E) alors la fonction $z : x \mapsto y\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est solution de l'équation

$$(E') \qquad 4z''(x) - 3z'(x) - z(x) = 0.$$

   On pourra effectuer la substitution $t = \frac{1}{x^2}$.
3. En déduire la solution générale de (E).